GUÍA DIDÁCTICA

EXPOSICIÓN

¡QUÉ GRAN **MATEMÁTICA** ES LA **NATURALEZA**!

'Un proyecto de divulgación de **SAEM THALES** en colaboración con **Fundación Descubre**'

Un proyecto de:

SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

DESQBRE FUNDACIÓN

Financiado por:

Junta de Andalucía
Consejería de Transformación Económica, Industria, Conocimiento y Universidades

ÍNDICE

GUÍA DIDÁCTICA

Edita: SAEM Thales y Fundación Descubre.

Coordinación: Agustín Carrillo de Albornoz Torres (SAEM Thales), Teresa Cruz Sánchez y Sara Parrilla Cubiella (Fundación Descubre)

Textos: Agustín Carrillo de Albornoz Torres, Esther Roquette Rodríguez y Mª. Teresa Valdecantos Dema (SAEM Thales).

Diseño: marcatuidea / Rocío Sánchez Gil.

Guía optimizada para imprimir en papel formato DIN-A4 a doble cara

EXPOSICIÓN '¡QUÉ GRAN MATEMÁTICA ES LA NATURALEZA!'

Ver exposición

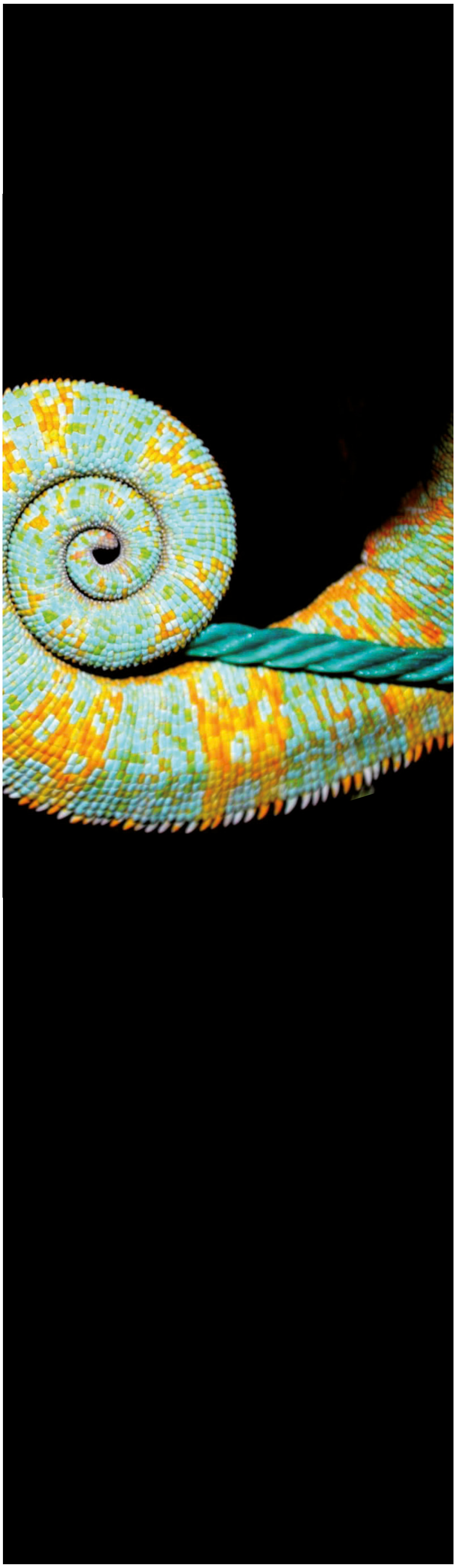
Coordinación General: Eva Acosta Gavilán (SAEM Thales) y Teresa Cruz Sánchez (Fundación Descubre).

Dirección científica y desarrollo de contenidos: Alejandro Sáez Martínez (SAEM Thales).

Dirección de divulgación: Carmen Segura Quirante (Fundación Descubre).

Contribuciones: Eva Acosta Gavilán, Juan Antonio Espinosa Pulido, Ana María Martín Carballo, Pedro José Martínez Fernández, José Ignacio Tijeras Uclés (SAEM Thales).

Diseño: Roberto C. García



GUÍA DIDÁCTICA

Puede que seas de las personas a las que las matemáticas le resultan aburridas, pero quizás no te has dado cuenta que, aunque te gusten muy poco, estás rodeado de matemáticas en todos los aspectos de tu vida, y aunque no las veas, están presentes en muchas de las cosas que utilizas en tu día a día.

A través de los distintos paneles que conforman esta exposición deseamos que descubras las matemáticas que hay en la naturaleza que te rodea. Para ello, a partir de una fotografía, de gran impacto y espectacularidad, puedas observar los conceptos matemáticos que esconde.

La geometría, la aritmética, el cálculo o la estadística estarán presentes en las imágenes que a continuación te presentamos correspondientes a esta exposición elaborada de manera conjunta por la Fundación Descubre y la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, con el patrocinio de la Consejería de Transformación Económica, Industria, Conocimiento y Universidades.

Para que vayas descubriendo las matemáticas ocultas en cada fotografía te ayudaremos con unas fichas de trabajo en las que te proponemos distintas actividades relacionadas con la imagen y con los contenidos que de ella se pueden deducir.

Esperamos que a partir de las bonitas imágenes de estos paneles seas capaz de cambiar tu forma de pensar sobre las matemáticas, para tener otra mirada tanto en tus estudios como en el mundo matemático y en la naturaleza que te rodea.

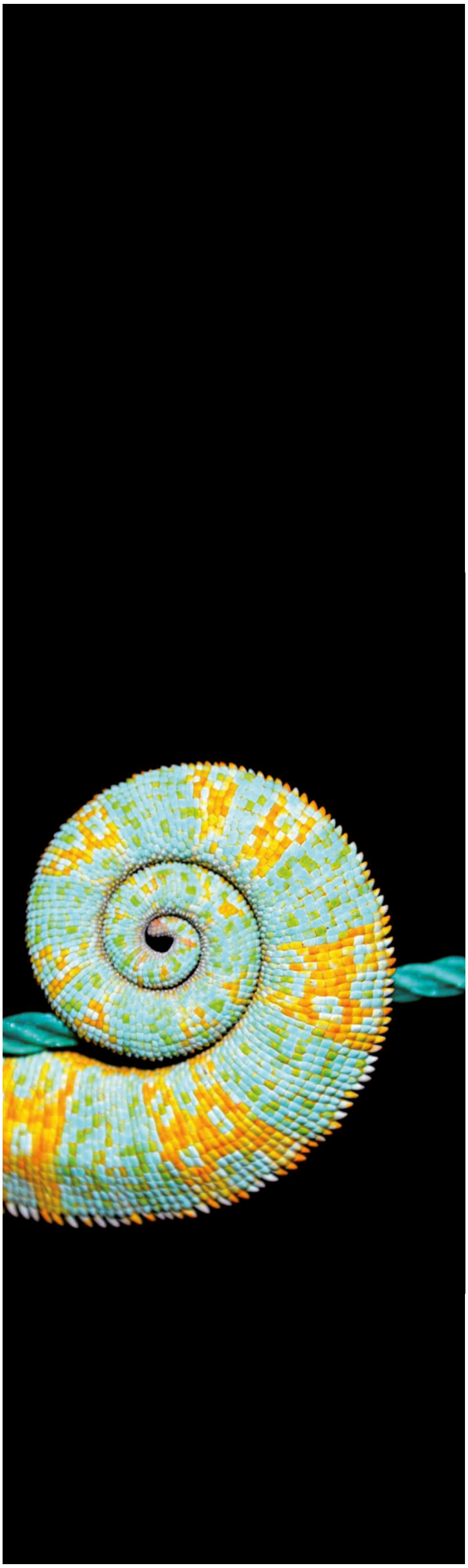
Por último, para animarte a descubrir las matemáticas que hay en la naturaleza, te presentamos varias imágenes de las muchas que puedes encontrar en Internet, sobre la que planteamos alguna cuestión de carácter general para descubrir tu mirada matemática.

Objetivos de la exposición

La exposición tiene como objetivo general servir de recurso didáctico para docentes, estudiantes y también que se pueda utilizar como material de divulgación para el público en general.

Como objetivos específicos se plantean los siguientes:

- Formar al profesorado en la divulgación y popularización de las matemáticas y proveerlo de recursos para que haga lo mismo con sus estudiantes.
- Contribuir a la mejora del aprendizaje de las matemáticas.
- Promover conductas de colaboración y respeto entre personas con diferentes edades y formación.
- Estimular la imaginación, la capacidad de decisión, el pensamiento divergente y la habilidad para enfrentarse a nuevas situaciones y resolver problemas imprevistos.
- Fomentar actividades de ocio sanas.
- Favorecer en la comunidad una reflexión que posibilite el aprecio que las matemáticas, sin duda, se merecen como instrumento de comprensión de la naturaleza.



Destinatarios

Como se indica en el apartado anterior, la exposición tiene distinto público; por un lado los docentes y estudiantes y por otro, el público en general.

La guía didáctica que la acompaña está dividida en dos partes. La primera consta de una serie de actividades dirigidas a todo tipo de público. La segunda, las fichas de trabajo (una por cada panel de la exposición) se ha diseñado con fines educativos, por lo que es aconsejable su uso con el alumnado de Educación Secundaria Obligatoria o Bachillerato.

En cada una de las fichas aparece indicado el nivel educativo para el que se recomiendan las actividades que propone.

Esto no quita que cualquier persona se anime a resolver las actividades planteadas en cada una de las fichas para descubrir que la naturaleza en una gran matemática.

ACTIVIDADES GENERALES

GUIA DIDÁCTICA

Exposición "¡Qué gran matemática es la naturaleza"

ACTIVIDADES GENERALES

Una primera fotografía de las matemáticas que encontrarás en la naturaleza

Observa estas imágenes que corresponden a algunas de las miles que puedes encontrar en la web al buscar "matemática y naturaleza" o "fotografía matemática".

- **¿Qué conceptos matemáticos crees que aparecen en cada una de ellas?**
- **¿Qué título le pondrías a cada una de estas fotografías?**


Imagen 1


Imagen 2


Imagen 3


Imagen 4

¿Sabías que...

todas las granadas, independientemente de su tamaño tienen 613 semillas?

El número 613 es primo, lo que significa que resultaría imposible repartir las semillas de forma equitativa entre más de una persona. O quizás si es posible, pero ¿cuántas personas serían necesarias para repartir las semillas de forma equitativa?

CUESTIONARIO GENERAL

Intenta responder las cuestiones siguientes sobre las distintas fotografías que componen la exposición.

Puedes hacerlo una vez que completes tu visita a la exposición o paso a paso, a medida que vayas observando cada una de las fotografías.

1. **¿Cómo crece la distancia al centro en la espiral logarítmica?**
2. **¿Cómo tienen que ser los vértices que se unen en un polígono regular para obtener un polígono estrellado?**
3. **¿Con qué otra magnitud, además de la dirección, permiten trabajar los vectores?**
4. **¿Cuántas teselaciones regulares hay?**
5. **¿En qué fotografía podemos encontrar un número trascendental que se puede aproximar a 22/7?**
6. **¿En qué fotografía podemos girar y volver a tener la misma figura? ¿Cómo se llama esta simetría?**
7. **¿En qué panel podemos encontrar distintos tipos de colores?**
8. **¿En qué panel podemos encontrar figuras que se repiten y se repiten infinitas veces? ¿Cómo se llaman este tipo de elementos?**
9. **¿En qué siglo vivió el matemático Leonardo de Pisa?**
10. **¿En qué tipo de triángulos es aplicable el teorema de Pitágoras?**
11. **¿Qué dos grandes tipos de espirales existen?**
12. **¿Qué panel tiene los números más grandes y pequeños a la vez?**
13. **¿Qué nombre reciben las sucesiones en las que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un valor constante?**
14. **¿Qué panel nos enseña figuras con mismo perímetro, pero área máxima?**
15. **¿Qué polígono es la figura de partida para crear el copo de Koch?**
16. **¿Qué se obtiene al realizar una inversión a una circunferencia?**
17. **En el panel en la que aparece una tela de araña que se va agrandando, ¿qué concepto matemático se ha descrito?**

! Si esta actividad la estás realizando en clase y quieres recordar la exposición puedes hacerlo en https://fundaciondescubre.es/recursos/exposicion-que-gran-matematica-es-la-naturaleza/

Sopas de letras: objetos matemáticos

Encuentra en la sopa de letras las siguientes palabras que corresponden a objetos matemáticos, indicando además en que fotografía o fotografías aparecen.

- Angulo
- Áureo
- Circunferencia
- Curva
- Fractal
- Giro
- Homotecia
- Inversión
- Isoperimétrico
- Logaritmo
- Progresiones
- Recta
- Semejanza
- Tangente
- Teselación
- Triángulo

P	R	E	C	T	A	N	G	E	N	T	E	H	T
I	S	O	P	E	R	I	M	E	T	R	I	C	O
A	G	U	I	N	V	E	R	S	I	O	N	Q	B
T	R	I	A	N	G	U	L	O	S	D	M	M	G
P	Y	T	F	R	A	C	T	A	L	N	D	C	I
L	O	G	A	R	I	T	M	O	O	C	F	M	R
R	H	O	M	O	T	E	C	I	A	L	K	Q	O
Y	V	P	R	O	G	R	E	S	I	O	N	E	S
X	I	A	G	Y	S	E	M	E	J	A	N	Z	A
Q	G	O	U	R	C	U	R	V	A	G	J	O	S
Q	B	U	W	R	U	T	E	W	C	Z	M	T	X
I	A	N	W	T	E	S	E	L	A	C	I	O	N
N	L	G	B	V	G	O	T	N	S	A	O	W	I
C	I	R	C	U	N	F	E	R	E	N	C	I	A

Sopas de letras: matemáticos

En esta nueva sopa de letras intenta encontrar los nombres de los matemáticos o científicos que aparecen en las fotografías, indicando en que siglo o siglos vivieron cada uno de ellos.

- Apolonio
- Arquímedes
- Bernouilli
- Cantor
- Descartes
- Euler
- Koch
- Leonardo
- Leslie
- Pitágoras
- Sierpinski
- Steiner
- Thales

Z	W	A	O	M	G	U	S	B	C	C	V	V	R
D	I	R	D	I	T	O	T	E	R	H	O	K	I
R	V	Q	E	J	P	J	E	R	N	B	M	S	P
D	C	U	Y	B	I	S	I	N	N	D	K	I	E
T	H	Í	V	T	T	X	N	O	X	E	O	E	U
Y	C	M	X	I	Á	K	E	U	A	S	C	R	L
Z	V	E	L	S	G	J	R	I	P	C	H	P	E
L	V	D	E	S	O	T	I	L	O	A	L	I	R
E	J	E	O	C	R	S	T	L	L	R	T	N	Y
S	E	S	N	A	A	J	H	I	O	T	U	S	Y
L	V	E	A	N	S	B	A	Y	N	E	M	K	Z
I	O	B	R	T	S	F	L	X	I	S	V	I	T
E	X	M	D	O	Z	M	E	G	O	L	R	X	B
Y	P	T	O	R	D	S	S	O	M	G	H	A	J

FICHAS DE TRABAJO

GUIA DIDÁCTICA

Exposición "¡Qué gran matemática es la naturaleza"

FICHAS DE TRABAJO

Para cada uno de los paneles de la exposición "¡Qué gran matemática es la naturaleza!" hemos preparado una ficha con distintas actividades que te ayudarán a descubrir las matemáticas que esconden.

Como indica el panel que sirve de presentación a la exposición, muestra unas gotitas de las matemáticas en la naturaleza, para su trabajo por el alumnado de Educación Secundaria y Bachillerato.

Cada una de las fichas indica el nivel educativo al que va dirigida, basado en los contenidos que desarrollan las actividades propuestas.

Los títulos y nivel educativo al que van dirigidas las fichas de trabajo son los siguientes:

Nº	Ficha	Nivel educativo
1	Polígonos estrellados I	Secundaria y Bachillerato
2	Polígonos estrellados II	Secundaria y Bachillerato
3	Dinámica de poblaciones	Bachillerato
4	Crecimiento exponencial de poblaciones	Secundaria y Bachillerato
5	Vectores	Secundaria
6	Homotecias	Secundaria y Bachillerato
7	Fractales I	Secundaria
8	Fractales II	Secundaria
9	Fractales III	Secundaria
10	Espiral arquimediana	Secundaria
11	Espiral logarítmica	Bachillerato
12	Thales y Pitagoras	Secundaria
13	Teselaciones	Secundaria
14	Teselaciones	Secundaria
15	Simetría axial	Secundaria
16	Simetria de giro	Secundaria y Bachillerato
17	Sucesión de Fibonacci	Secundaria y Bachillerato
18	Desigualdad isoperimétrica	Bachillerato
19	Pi en la naturaleza	Secundaria
20	El arcoíris	Bachillerato
21	Notación científica	Secundaria

Leyenda: Secundaria y Bachiller | Secundaria | Bachiller

Panel 1

Haz click aquí para ver el panel completo

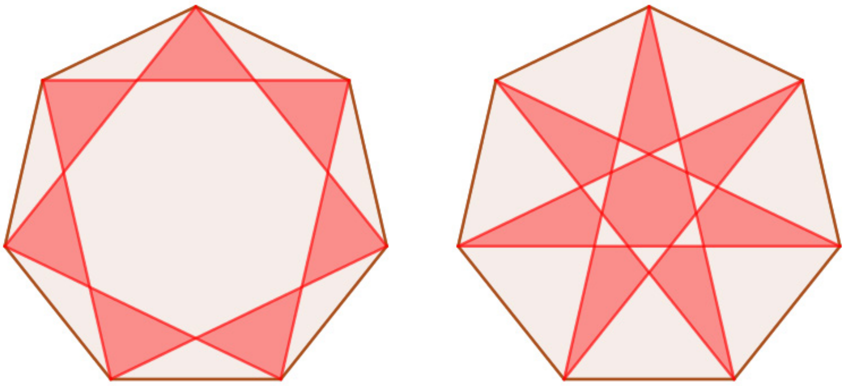
FICHA 1: POLÍGONOS ESTRELLADOS I

Nivel educativo:
Secundaria y Bachillerato

PARA LEER

A partir de un polígono regular de n lados, siendo n>4, se puede obtener un polígono estrellado uniendo vértices no consecutivos, tal y como aparece en el **panel 1** que muestra un heptágono.

En las siguientes figuras aparecen dos polígonos estrellados obtenidos a partir de un heptágono regular (polígono de siete lados).



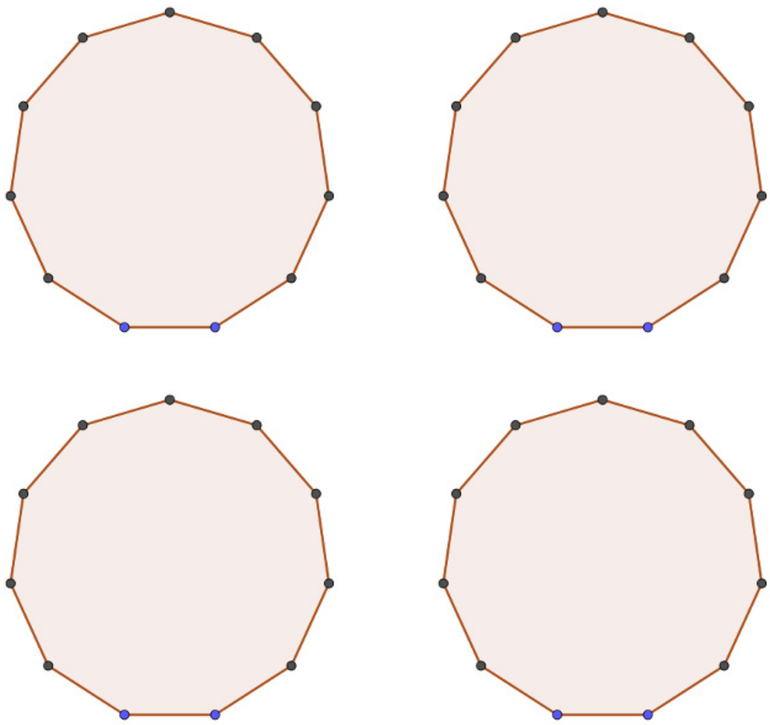
ACTIVIDADES

Actividad 1

Intenta, si es posible, obtener más polígonos estrellados a partir del heptágono.

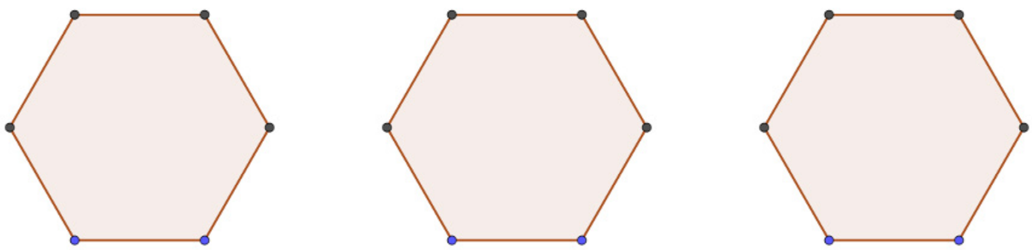
Actividad 2

Construye todos los polígonos estrellados posibles a partir del endecágono regular (polígono de once vértices.



Actividad 3

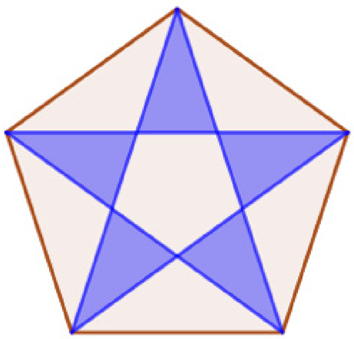
Haz lo mismo a partir del hexágono regular.



Nos podemos preguntar cuántos polígonos estrellados se pueden obtener a partir de un polígono regular cualquiera.

El número de polígono estrellados que se pueden obtener a partir de un polígono regular de n lados, siendo n>4, es la cantidad de números primos con n que son menores que la mitad de n.

Por ejemplo, para el pentágono regular (5 lados), la mitad es 2,5. Tenemos que determinar cuántos números menores que 2,5 son primos con 5. Como solo existe el 2 que cumple esta condición, podemos decir que solo se puede obtener un polígono estrellado a partir del pentágono que es el representado en la siguiente figura:

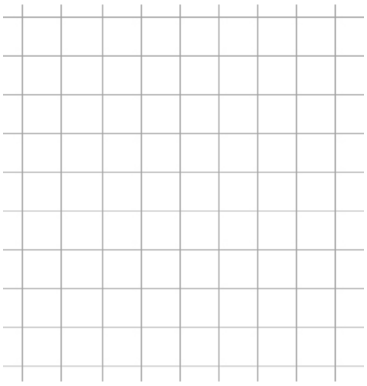


Este polígono estrellado, como puedes observar en el panel número 2, se denomina pentagrama o pentáculo, siendo una forma que se encuentra a menudo en la naturaleza.

Cuando los vértices se unen de dos en dos, dejando un vértice en medio, el polígono estrellado se denomina de 1ª especie, mientras que si los vértices se unen de tres en tres, dejando dos vértices en medio, el polígono estrellado se denomina de 2ª especie, y así sucesivamente se irán nombrando estos polígonos. En ocasiones observaremos que para definir un polígono estrellado aparecen dos números, por ejemplo {7/3} expresa que se ha obtenido a partir de un polígono regular de siete lados, uniendo los vértices de tres en tres (dejando dos vértices en medio de cada unión).

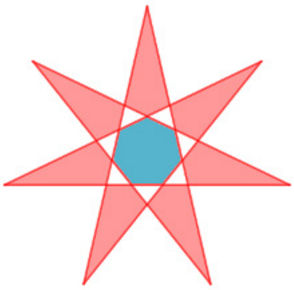
Actividad 4

Dibuja el polígono estrellado {9/4}.



En el panel 1 aparece un heptágono del que se indica que tiene densidad 3. ¿Qué significa este concepto?

Si observamos el heptágono del panel 1, es similar al siguiente:



Si miramos el centro del polígono y observamos las regiones que lo rodean, deducimos que hay una región de color azul, otra de color blanco y la tercera es de color rojo, por lo que se dice que tiene densidad 3.

Actividad 5

Determina cuál es la densidad del otro polígono estrellado que se ha obtenido a partir del heptágono regular.

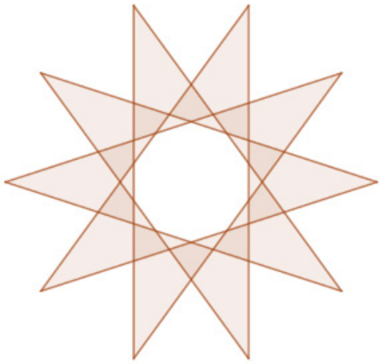
Actividad 6

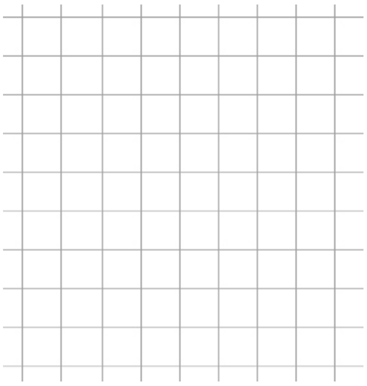
Completa la tabla siguiente:

Polígono regular	Nº Polígonos estrellados	Especie	Densidad
Triángulo			
Cuadrado			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octógono			
Eneágono			
Decágono			
Endecágono			
Dodecágono			

Actividad 7

Intenta dibujar la figura siguiente aprovechando la cuadrícula, describiendo cómo está formada.





En este enlace **https://www.geogebra.org/m/hQYremNx** puedes manipular con GeoGebra diversos polígonos estrellados.

Si necesitas descargar GeoGebra, puedes hacerlo en **www.geogebra.org**

Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 2: POLÍGONOS ESTRELLADOS II

Nivel educativo:
Secundaria y Bachillerato

PARA LEER

Dediquemos ahora algún tiempo al pentagrama, también llamado estrella de cinco puntas o estrella pitagórica cuyo origen es el “pentalfa de Pitágoras”, del griego penta (cinco) y alfa, la primera letra de dicho idioma, que tiene la figura de un triángulo pequeño.

La estrella de cinco puntas es representativa del cuerpo humano, porque en ella están marcados las cinco extremidades del hombre, sus cinco sentidos y sus cinco elementos naturales (la materia, el espíritu, el alma, la fuerza y la vida). La interpretación física de este símbolo indica que en el cuerpo humano están concentradas las cinco fuerzas o elementos de la naturaleza: tierra, agua, aire, fuego y tiempo.

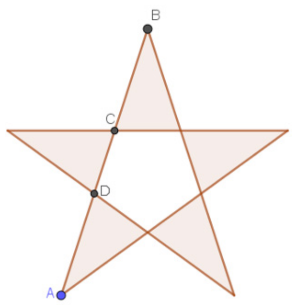
La estrella de cinco puntas es un símbolo del hombre, no sólo por su parecido físico al hombre geométrico de Vitrubio, sino porque sus lados encierran la proporción áurea, número que aparece en todas las formas de vida y en el hombre.

El número áureo cuyo valor es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ =1,61803398..., se considera el valor de la perfección, por lo que fácilmente se encuentra en muchos objetos cotidianos, así como en edificios y construcciones que buscan lograr la atención del observador. Un ejemplo en el DNI en el que se puede comprobar que la razón entre los dos lados del rectángulo es una buena aproximación de este valor.

ACTIVIDADES

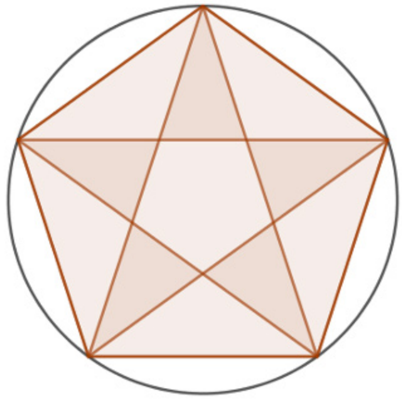
Actividad 1

Comprueba las relaciones que aparecen en el panel para obtener el número áureo.



Actividad 2

En esta figura hay muchas más relaciones, de las que algunas te proponemos que deduzcas u observes.



a. Las diagonales trazadas desde un vértice del pentágono regular trisecan el ángulo interior del mismo.

b. La razón entre la diagonal y el lado del pentágono es el número áureo.

c. La diferencia entre la diagonal (d) y el lado (l) del pentágono, d – l es el lado de la estrella de cinco puntas.

En el siguiente enlace encontrarás un artículo sobre más datos del número áureo y la fascinación que ha despertado a lo largo de la historia.

https://www.elconfidencial.com/tecnologia/2014-10-14/treinta-cosas-que-no-sabias-sobre-el-numero-aureo_231903/

Panel 3

Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 3: DINAMICA DE POBLACIONES

Nivel educativo:
Bachillerato

PARA LEER

Cuando el estudio de la variación de una población se realiza en función del tiempo, el proceso recibe el nombre de dinámica de la población.

El objetivo de la dinámica de poblaciones es estudiar los cambios que sufren las poblaciones, determinar sus causas, predecir su comportamiento y analizar sus consecuencias. Un modelo de estudio es el denominado de dinámica de Leslie, diseñado por *Patrick Holt Leslie* (1900-1974).

Este modelo utiliza matrices para determinar la población existente después de un periodo de tiempo, en concreto la dinámica de la población quedará determinada por una matriz cuadrada denominada matriz de Leslie.

Supongamos que una determinada población se agrupa por sectores de edad, en este caso en tres sectores con la misma duración de tiempo y que corresponden a intervalos de 5 años. Si la observación entre dos periodos de tiempo consecutivos de 5 años han dado unas tasas de de fecundidad para cada sector de edades, expresadas por la lista $\left\{\frac{1}{10}, 6 \text{ y } 8\right\}$; que las tasas de supervivencia de cada especie a la siguiente viene dada por $\left\{\frac{1}{15}, \frac{1}{18}\right\}$.

Y por último, el tamaño inicial de la población en cada uno de los sectores viene dada por

$$\begin{pmatrix} 150 \\ 80 \\ 48 \end{pmatrix}$$

Para estudiar la evolución de esta población en cada uno de los sectores en la que se ha dividido que llamaremos P_1, P_2 y P_3, en el momento de la primera observación, es decir al cabo de 5 años.

$$P_1 = \frac{1}{10}\,150+6.80+8.48=874 \qquad P_2 = \frac{1}{15}\,150=10 \qquad P_3 = \frac{1}{8}\,80=10$$

Lo que daría una población de un total de 894 individuos.

Los cálculos anteriores se pueden expresar en forma matricial en la forma siguiente:

$$P^i = L \, . P^{i-1}$$

Siendo P^i la población en cada observación i de tiempo, mientras que P^{i-1} es la población en el periodo anterior y L es la matriz de Leslie.

Por tanto, para la primera observación se tendrá

$$P^1 = L \, . P^0$$

$$P^0 = \begin{pmatrix} 150 \\ 80 \\ 48 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 6 & 8 \\ \frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

Mientras que $P^i = \begin{pmatrix} P_1^i \\ P_2^i \\ P_3^i \end{pmatrix}$

Si se desea estimar cuál será la población después de 50 años, habría que obtener el valor de P^{10}, ya que 20 años corresponde a 4 periodos de 5 años, que es el tiempo de las observaciones realizadas.

$$P^4 = L^4 . P^0$$

El resultado del producto de matrices anterior es:

$$\begin{pmatrix} 188{,}2 \\ 25{,}6 \\ 1{,}9 \end{pmatrix}$$

Por tanto, habría unos 215 individuos.

Es recomendable utilizar cualquier programa que permita obtener fácilmente la potencia de una matriz de Leslie.

ACTIVIDADES

Actividad 1

En el panel aparece una matriz de Leslie correspondiente a una población de ardillas. Determina según esos datos cuál sería la población existente después de un periodo de seis observaciones.

En el siguiente enlace encontrarás una calculadora online para realizar operaciones con matrices **https://matrixcalc.org/es/**

Los cuadrados mágicos se pueden expresar como una matriz cuadrada, por lo que te animamos a conocer algo más sobre las curiosidades que presentan las matrices denominadas mágicas, a través del blog siguiente: **https://www.gaussianos.com/maravillas-que-te-encuentras-cuando-juegas-con-cuadrados-magicos/**

Panel 4

Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 4: CRECIMIENTO EXPONENCIAL DE POBLACIONES

Nivel educativo:
Secundaria y Bachillerato

PARA LEER

En otra de los paneles de esta exposición se describen un tipo de sucesiones de números reales con unas características especiales (panel número 17).

Una sucesión es una serie infinita de números reales que siguen una determinada ley de formación, en la que cada uno de ellos se denomina término de la sucesión y está determinado por el lugar que ocupa.

Así en la sucesión 0, 3, 8, 15, 24, ... , el primer término es 0, lo que representamos por $a_1=0$, el segundo término es 3, $a_2=3$; 8 sería el tercer término $a_3=8$ y así sucesivamente.

La notación utilizada representa con un nombre a la sucesión (en este caso a) y con los subíndices la posición de cada término. Por tanto, a_n representará al término que ocupa la posición n, que es una posición cualquiera, por lo que dicha expresión se denomina término general de la sucesión.

Es evidente que cuando se conoce la expresión del término general se conoce toda la sucesión ya que bastará con sustituir n por el valor correspondiente al término que se desea obtener.

Por ejemplo, si $a_n=n^2+2n$ es la expresión del término general de una sucesión, los primeros términos serán:

n=1 $a_1=1^2+2.1=3$

n=2 $a_2=2^2+2.2=8$

n=3 $a_3=3^2+2.3=15$

...

Observa que a partir del término general de una sucesión se obtienen todos sus términos.

Podemos escribir infinitas sucesiones obtenidas a partir de una relación o expresión matemática, aunque hay algunas sucesiones especialmente famosas como la que a continuación te contamos.

ACTIVIDADES

Actividad 1

Genera los diez primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

$a_n=n^2-n$

$b_n=4n-2$

$c_n=3 .2^n$

La segunda y la tercera sucesión de la actividad anterior reciben un nombre especial por la forma en la que se generan sus términos como podrás comprobar en la actividad siguiente.

Actividad 2

Comprueba qué diferencia existe entre cada dos términos consecutivos de las sucesiones anteriores.

Averigua también qué relación existe entre el cociente de dos términos consecutivos de las sucesiones anteriores.

Seguro que has encontrado que la diferencia entre cada dos términos de la segunda sucesión siempre es contante, al igual que ocurre con el cociente entre dos términos consecutivos de la tercera sucesión que también es constante.

Cuando la diferencia entre todos los términos de una sucesión es contante, ese valor se denomina diferencia de la sucesión y la sucesión recibe el nombre de progresión aritmética.

Por ejemplo, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... , es una progresión aritmética cuya diferencia es 3.

Y cuando el cociente entre dos términos consecutivos siempre es contante, la sucesión recibe el nombre de progresión geométrica y ese valor constante es la razón de la progresión.

Un ejemplo de este tipo de progresiones podría ser 2, 8, 32, 128, 512, ..., es una progresión geométrica cuya razón es 4.

Actividad 3

Crea una progresión aritmética cuyos términos vayan decreciendo.

Y también una progresión geométrica decreciente, es decir que cada término sea mayor que el siguiente.

Y por último, una nueva progresión geométrica cuyos términos vayan alternado el signo, es decir si uno es positivo, el siguiente término debe ser negativo, el siguiente positivo, y así sucesivamente.

Basta con escribir los cinco primeros términos de cada una de las sucesiones anteriores.

Actividad 4

Cristina, como jefa de Pablo le propone dos alternativas para pagarle el trabajo que realizará durante el próximo mes.

a. El primer día recibirás 10 €, el segundo 20 €, el tercero 30 €, el cuarto 40 € y así sucesivamente, así hasta llegar al último día del mes.

b. El primer día recibirás un céntimo, el segundo 2 céntimos, el tercero 4, el cuarto 8 y así hasta llegar al último día del mes.

¿Qué decisión tomarías si fueras Pablo? Justifica la razón por la que has elegido la opción que consideres mejor.

La actividad anterior tiene relación con la leyenda de Sissa sobre la invención del ajedrez que puedes leer en la Web siguiente:

https://cuentosdelmundo.wordpress.com/2013/10/08/la-leyenda-de-sisa-el-origen-del-ajedrez/

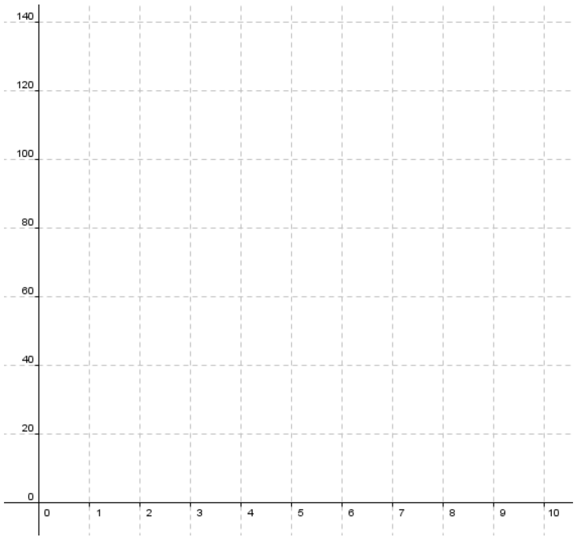
Actividad 5

Considera 1 como primer término de una progresión y 2 el valor contante a partir del cual tendrás que obtener una progresión aritmética y una geométrica.

Escribe los diez primeros términos de cada una de las progresiones.

¿Qué observas con relación al crecimiento de ambas progresiones?

Representa los valores obtenidos para cada una de las progresiones.



Actividad 6

Determina el valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de 3, 4, 5, 6, ... lados.

Construye la sucesión formada por los valores obtenidos anteriormente e intenta obtener una expresión para la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

La sucesión obtenida ¿es algún tipo de progresión?

Repite la actividad considerando en este caso la suma de los ángulos exteriores de los polígonos regulares.

Si te gustan los pasatiempos, seguro que alguna vez te habrás encontrado actividades en las que te proponen que continúes una serie numérica.

Por ejemplo, si escribimos los números 2, 6, 10, 14, ..., te resultará fácil encontrar la relación existente entre ellos, de manera que podrías afirmar que la secuencia seguiría con un 18, después 22 y a continuación 24 ya que basta con sumar 4 a un número para obtener el siguiente en la serie.

Actividad 7

Un poquito más complicada puede resultarte el continuar la serie siguiente:

1, 2, 4, 7, 11, ...

¿Has averiguado cuáles son los números con los que sigue la serie? Lo habrás conseguido si una vez analizados los números has establecido la relación entre ellos.

Actividad 8

Intenta practicar un poco más, continuando las series numéricas siguientes, escribiendo los cuatro números que siguen en cada una de ellas.

0, 3, 8, 15, 24, ...

10, 9, 7, 4, 0, ...

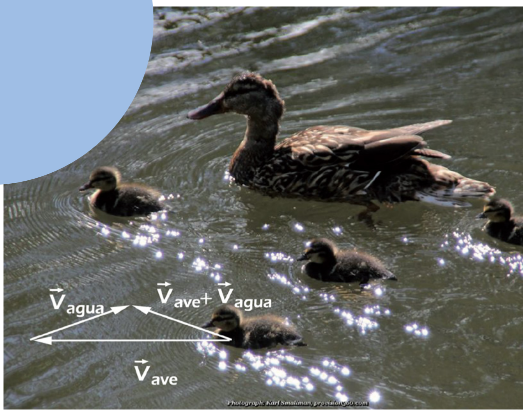
2, 3, 6, 18, 108, ...

$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{9}, \frac{4}{17}, \frac{5}{33}, \ldots$

A través del enlace siguiente podrás obtener el límite de una sucesión:

https://www.geogebra.org/m/vjfKMFMG

Panel 5



Haz click aquí para ver el panel completo

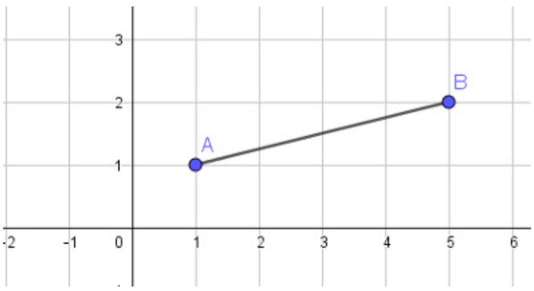
FICHA 5: VECTORES

Nivel educativo:
Secundaria

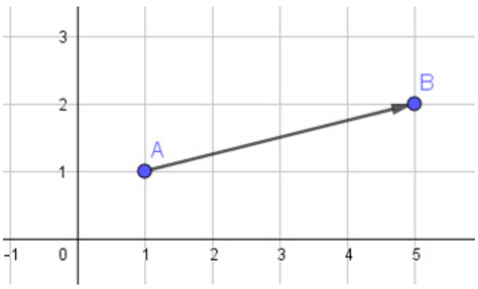
PARA LEER

Un vector es un segmento que tiene una orientación y sentido, por lo que será un segmento con un origen y un extremo.

Por ejemplo, si representamos el segmento AB en el plano, se tendrá la figura siguiente:



Mientras que si queremos representar un vector, será necesario indicar qué punto será el origen y cuál será el extremo.



El vector AB será opuesto al vector BA, ya que el origen del primero coincide con el extremo del segundo. Por tanto, se podrá escribir $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

En el plano cada punto está definido por sus coordenadas (x, y), por lo que un vector quedará definido por la diferencia entre las coordenadas del punto extremo y las del punto origen. En el ejemplo anterior, A tiene de coordenadas (1, 1), mientras que B tiene por coordenadas (5, 2). Por tanto el vector $\overrightarrow{AB}=(5,2)-(1,1)=(4,1)$.

Los vectores se representan con una letra minúscula.

ACTIVIDADES

Actividad 1

De las siguientes magnitudes, ¿cuáles crees que se representan mediante vectores?

a. Tiempo.

b. Masa.

c. Velocidad.

d. Distancia.

e. Aceleración.

f. Desplazamiento.

g. Fuerza ejercida sobre un cuerpo.

Actividad 2

Representa en los ejes coordenados los vectores siguientes:

$\vec{v}=(3,-2)$

$\vec{u}=(-4,0)$

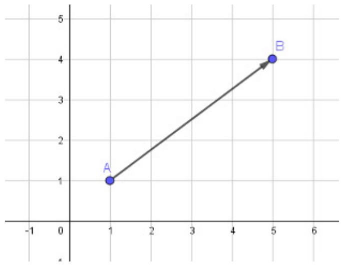
$\vec{w}=(2,1)$

$\vec{t}=(-3,-4)$

En un vector se define el módulo como su longitud.

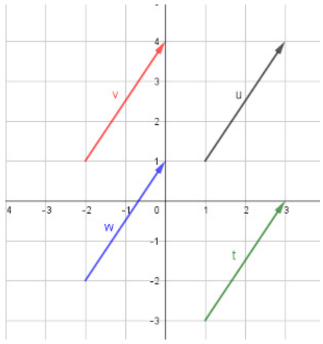
Actividad 3

¿Cómo podrás determinar el módulo del vector representado en la figura? ¿Hay algún teorema conocido que puedas aplicar?



Actividad 4

¿Qué observas en los vectores representados en la imagen siguiente?



Dos vectores que tienen el mismo módulo, dirección y sentido, se denominan equipolentes.

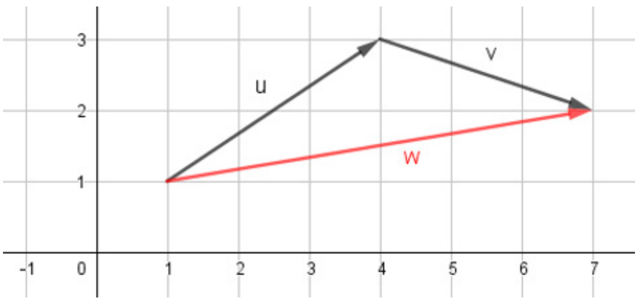
Actividad 5

Dibuja un vector equipolente al vector $\vec{v}$=(3,-2) cuyo origen sea el punto A(4, 4).

Y traza un nuevo vector, también equipolente al vector anterior cuyo extremo sea el punto B(-2, -3).

El panel de la exposición indica que a la velocidad a la que se desplaza el ave hay que sumarle la velocidad de la corriente, utilizando el método del paralelogramo. Este método consiste en añadir el segundo vector a partir del extremo del primer vector, en la que el vector suma es el vector que tiene por origen el origen del primer vector y como extremo el extremo del segundo.

En la imagen aparece el vector suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

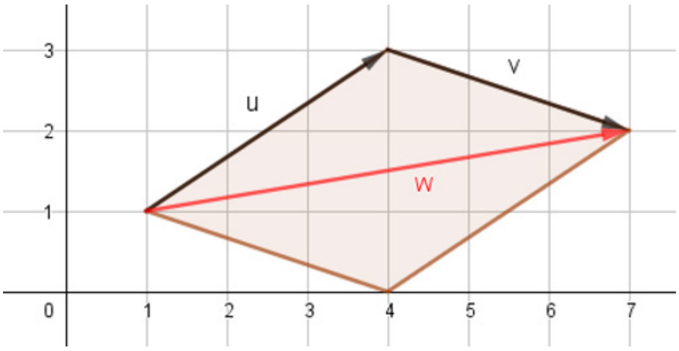


Este método se denomina del paralelogramo ya que se puede formar un paralelogramo cuya diagonal es el vector suma.

Actividad 6

¿Cómo se podrá obtener la suma de los vectores $\vec{u}$=(2,-1) y $\vec{v}$=(4,3), sin representarlos gráficamente, solo a partir de sus coordenadas?

Compruébalo después con la representación gráfica.



Actividad 7

Encuentra un método gráfico para obtener la diferencia entre dos vectores.

Compruébalo con algún ejemplo.

En esta página puedes resolver de manera online actividades sobre vectores:

https://www.vadenumeros.es/actividades/operaciones-con-vectores.htm

Panel 6

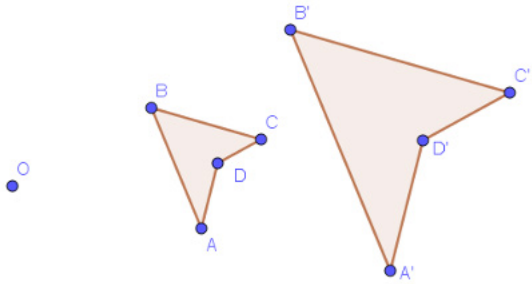
Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 6: HOMOTECAS

Nivel educativo:
Secundaria y Bachillerato

PARA LEER

Una homotecia es una transformación que se aplica a un punto o a los puntos de una figura con respecto a un punto O, de manera que cada punto P de la figura inicial se transforma en un punto P', tal que la distancia desde O a P' es r veces la distancia de O a P. El valor r se denomina razón de la homotecia, mientras que O es el centro de la homotecia.

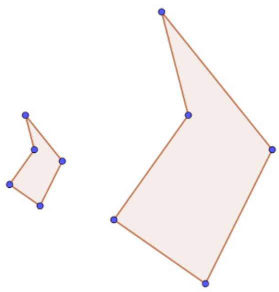


En el ejemplo siguiente se ha realizado una homotecia de razón 2 al polígono ABCD para obtener el polígono A'B'C'D'.

ACTIVIDADES

Actividad 1

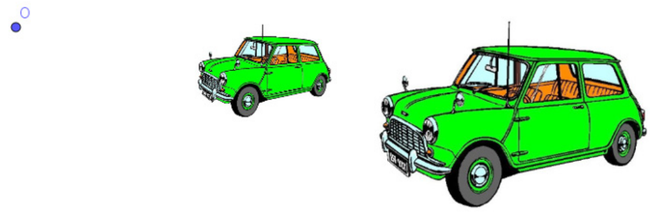
Los dos polígonos que aparecen en la imagen se han obtenido a partir de una homotecia. ¿Cómo puedes determinar el centro O de la homotecia que se ha realizado?



En una homotecia, entre los puntos O, P y P' existe la siguiente relación $\vec{OP'} = r \cdot \vec{OP}$.

Actividad 2

Conociendo la relación anterior, determina cuál es la razón en la homotecia que se ha realizado a la figura de la imagen siguiente, en la que O es el centro de la homotecia.



Actividad 3

Si a un cuadrado de cualquiera se le aplica una homotecia de centro el centro del cuadrado y razón igual a 2, ¿Qué relación hay entre los perímetros de los dos cuadrados? ¿Y entre las dos áreas?

Actividad 4

Si tenemos una imagen cualquiera y se desea obtener una imagen similar pero más pequeña, ¿cómo debe ser el valor de la razón?

Actividad 5

En las homotecias realizadas en las actividades anteriores, la nueva figura (homotética) aparece a la derecha de la imagen inicial, ¿cómo debe ser el valor de la razón de la homotecia, para que la nueva figura a aparezca a la izquierda de la imagen inicial? ¿Y para que aparezca a la izquierda del centro de la homotecia?

Inténtalo con un ejemplo y describe qué ocurre.

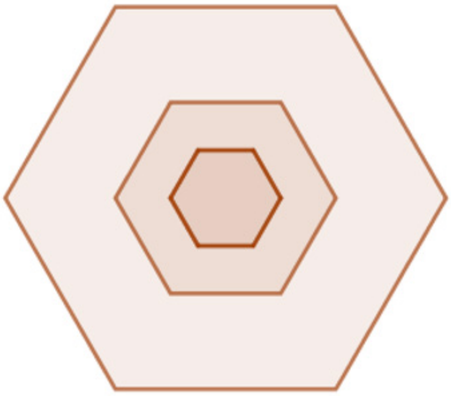
Actividad 6

Reducir o ampliar una fotografía sería como aplicar una homotecia a la fotografía inicial. ¿Qué razón de homotecia deberá aplicarse para obtener una ampliación del 40%? ¿Y una reducción del 20%?

Imagen 5

Actividad 7

Los tres hexágonos que aparecen en la imagen se han obtenido mediante homotecias, cada uno a partir del anterior, utilizando como centro el centro del hexágono y con una razón de homotecia igual a 2. ¿Qué valor hay que utilizar como razón de homotecia para obtener el tercer hexágono directamente a partir del primero? ¿Y qué valores podemos utilizar para seguir obteniendo nuevos hexágonos?



Actividad 8

¿Cómo se puede obtener una circunferencia homotética de una circunferencia dada, cuya razón sea 2, con respecto a un punto O cualquiera como centro de la homotecia?

Te recomendamos que utilices GeoGebra (www.geogebra.org) para realizar construcciones en las que obtengas la homotecia de una figura dada.

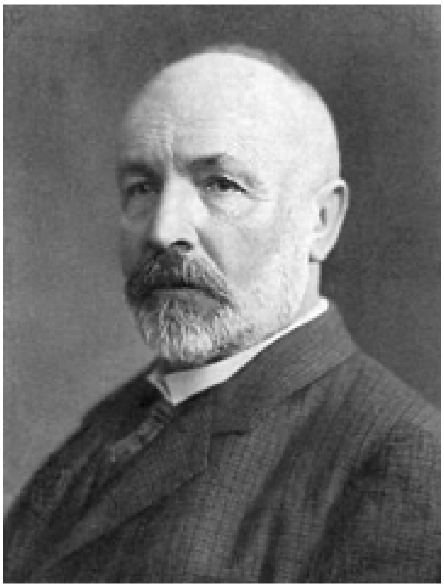
Panel 7

Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 7: FRACTALES I

Nivel educativo: Secundaria

PARA LEER



Un fractal es un objeto semi-geométrico cuya estructura básica se repite a diferentes escalas. Los fractales son estructuras geométricas irregulares y de detalle infinito que pueden ser generados por un proceso iterativo capaz de producir estructuras autosimilares a cualquier escala de observación.

Vamos a estudiar algunos de los fractales más famosos.

El conjunto de Cantor.

Este conjunto fue introducido por Georg Cantor en 1883 y está construido en el intervalo real [0,1].

Se construye siguiendo estos pasos:

- Comienza con un intervalo de longitud 1
- Se divide en tres partes iguales y se elimina la parte central, sin incluir los extremos.
- Cada una de las dos partes que han quedado, se dividen en tres, y se eliminan las partes centrales, sin incluir los extremos
- Y así sucesivamente.

ACTIVIDADES

Actividad 1

¿Serías capaz de construir un conjunto de Cantor de 2 iteraciones? Siendo la iteración E_0 el intervalo [0,1]

¿Cuál es la longitud del intervalo E_0? ¿Y del conjunto E_1? ¿Y del conjunto E_2?

¿Serías capaz de generalizarlo para el intervalo n-ésimo?

Actividad 2

¿Cuánto suma la longitud del intervalo E_0 más E_1?

¿Cuánto suma la longitud del intervalo $E_0 + E_1 + E_2$?

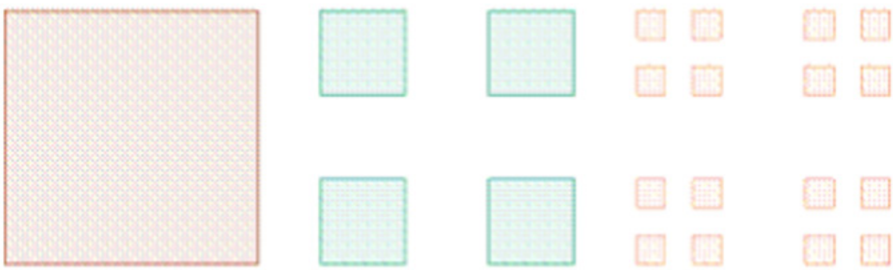
¿Cuánto suma la longitud del intervalo $E_0 + E_1 + E_2 + \dots$?

Actividad 3

Nos podemos plantear otro tipo de construcción, en vez de dividir el intervalo en tres partes, lo vamos a dividir en 5 partes y eliminamos la segunda y cuarta, sin incluir los extremos. ¿Podrías repetir las actividades 1 y 2 con esta nueva construcción?

El cuadrado de Cantor

Podemos seguir el mismo esquema, en 2 dimensiones



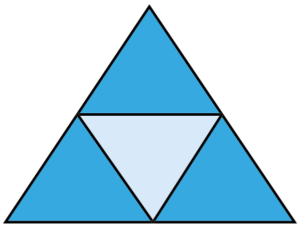
Etapa 1 Etapa 2

Actividad 4

¿Podrías indicar el área del primer cuadrado? ¿Y el área total de los cuadrados de la fase 1? ¿Y para la fase 2? ¿Puedes generalizarlo?

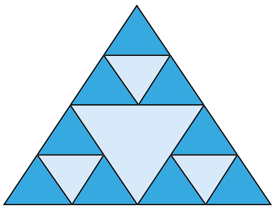
Triángulo de Sierpinski

Partimos de un triángulo equilátero. Construimos un nuevo triangulo uniendo los puntos medios de los tres lados, desechando el triangulo central.



Para cada uno de los tres triángulos realizamos el mismo proceso.

Y así indefinidamente.



Actividad 5

Vamos a relacionar el triangulo de Sierpinski con el Triangulo de Pascal.

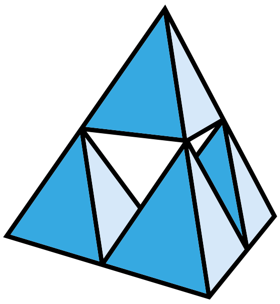
Dibuja el triangulo de Sierpinski encima del triangulo de Pascal, ¿Qué observas? ¿Qué números se quedan coloreados y cuáles no?

Pirámide de Sierpinski

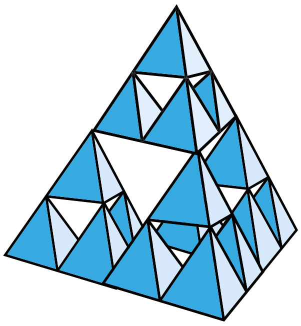
Ahora vamos a realizar un fractal pero en vez de en 2 dimensiones en 3, como es la pirámide de Sierpinski.

Veamos en como construye.

Partimos de un tetraedro (una pirámide). Esta sería la fase 0.

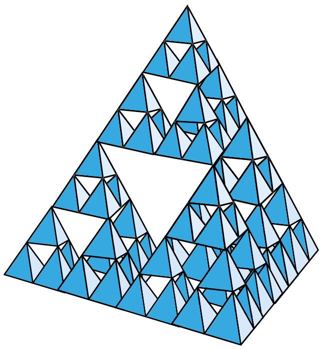


Para la fase 1 colocamos 4 tetraedros según la siguiente imagen.



En la siguiente fase colocamos 4 bloques de la fase 1 según la imagen, y así sucesivamente.

Actividad 6



¿Cuántos tetraedros tiene la pirámide en la fase 1? ¿Y en la fase 2? ¿Y en la fase 3?

¿Podrías generalizarlo para la fase n?

Para saber más sobre los fractales, te recomendamos algunas páginas:

https://www.xatakaciencia.com/matematicas/que-son-los-fractales-y-como-se-construyen

http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodperv/fractales/definicion-de-fractal/

http://proyectomatematicasyarte.blogspot.com/2017/06/fractales-matematicas-y-arte-recursos.html

También puedes ver un fractal en los vídeos siguientes:

https://www.youtube.com/watch?v=pCpLWbHVNhk

https://www.youtube.com/watch?v=1EYJ13KtCqk

Panel 8

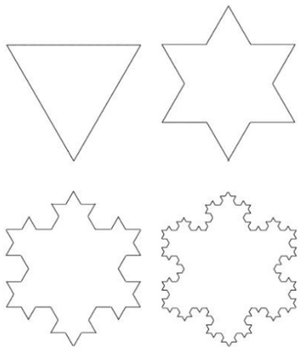
Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 8: FRACTALES II

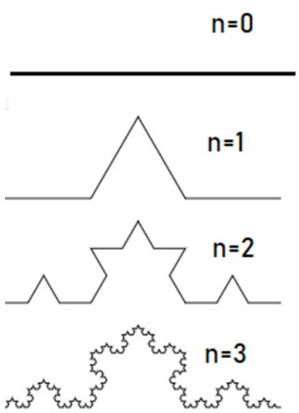
Nivel educativo:
Secundaria

PARA LEER

En la exposición hay tres paneles dedicados a fractales porque están muy presentes en la naturaleza. En este caso se refiere a los copos de nieve y el fractal copo de nieve se genera, como se indica en el panel, a partir de un triángulo equilátero en el que cada lado se divide en tres partes iguales y sobre la parte central se crea un nuevo triángulo equilátero.



Una alternativa para crearlo sería considerar cada lado del triángulo como el origen de una curva de Koch:



La curva de Koch tiene dimensión fractal 4/3: cada curva es 4/3 de la anterior; eso significa que, si para n=0, la longitud del lado es de 66 mm, para n=1 la longitud sería $66 \cdot \frac{4}{3}$ =88 mm.

ACTIVIDADES

Actividad 1

Calcula la longitud de la curva de Koch partiendo de un lado de longitud 30 cm para

a. n=1

b. n=2

c. n=3

d. n=4

¿Qué perímetro tendrían los copos de nieve fractales correspondientes?

Actividad 2

Vamos a tratar de calcular el área del copo de nieve a partir de un triángulo equilátero de lado 2 cm.

a. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura de un triángulo equilátero de lado 2 cm.

b. ¿Qué área tendrá ese triángulo?

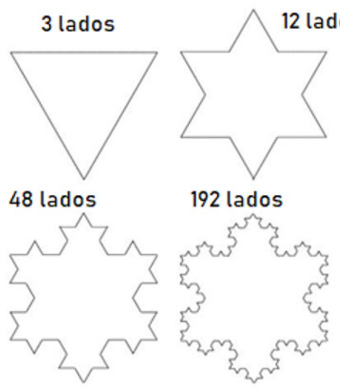
c. Si te fijas en la primera iteración, cada triángulo que se le añade tiene como superficie 1/9 de la superficie del triángulo de partida. ¿Qué superficie tendrá entonces nuestro copo de nieve para n=1?

d. ¿Y para n=4?

Área del copo de nieve fractal

En el panel se habla de una de las maravillas del infinito, mientras que el perímetro de la curva de Koch es infinito, porque siempre va creciendo 4/3 de la longitud anterior, el área es finita. Para demostrarlo hace falta manejar el concepto de progresión geométrica.

Tenemos que darnos cuenta que en cada iteración se multiplica el lado del copo de Koch por cuatro.



Actividad 3

a. ¿Cuántos triángulos se construyen en cada lado por cada iteración?

a. ¿Cuántos lados tiene un copo de Koch para n=7? ¿Y para n?

Ahora veamos qué pasa con los triángulos. Ya se ha visto que en cada iteración los triángulos que se añaden tienen un noveno del área de partida. Para simplificar el razonamiento suponemos que el área de partida es la unidad (aunque el razonamiento es el mismo para área=A)

Actividad 4

Calcula el área de los triángulos que se van añadiendo para:

a. n=1

b. n=2

c. n=7 ¿y para n?

El área de cada iteración es la suma de la anterior más la de los nuevos triángulos, ahora hay que tener cuidado al hacer el razonamiento para buscar la recurrencia

$n=0 \rightarrow 1$

$n=1 \rightarrow 1+3\cdot\frac{1}{9}$

$n=2 \rightarrow 1+3\cdot\frac{1}{9}+4\cdot3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^1$

$n=3 \rightarrow 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^1+4^2\cdot3\left(\frac{1}{9}\right)^3=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^2$

Saca factor común y verás una progresión geométrica de razón menor que la unidad ¿cuánto vale la suma?

La simetría del copo de nieve

Otro aspecto bello de los copos de nieve es su simetría.

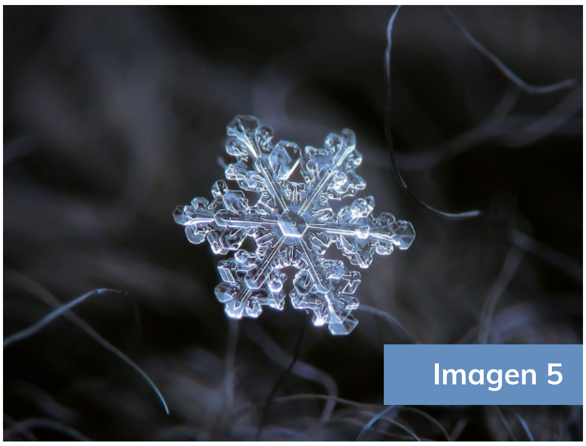


Imagen 5

Casi todos los copos de nieve tienen estructura hexagonal y muchas simetrías. Si se observa el copo de nieve de la figura se aprecia su forma de hexágono regular y muchos tipos de simetría: seis axiales y seis rotacionales. ¿Podrías indicarlas todas?

Para saber más sobre los fractales, te recomendamos algunas páginas:

https://www.xatakaciencia.com/matematicas/que-son-los-fractales-y-como-se-construyen

http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodperv/fractales/definicion-de-fractal/

http://proyectomatematicasyarte.blogspot.com/2017/06/fractales-matematicas-y-arte-recursos.html

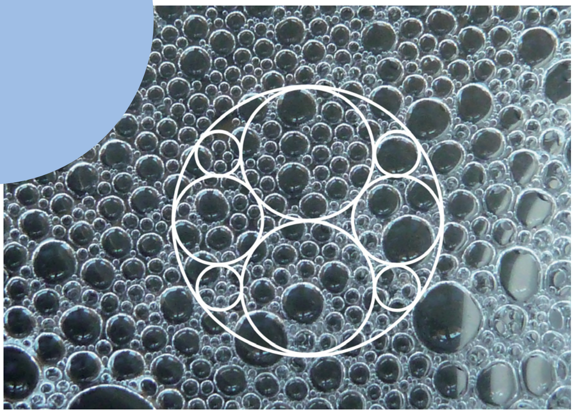
También puedes ver un fractal en los vídeos siguientes:

https://www.youtube.com/watch?v=pCpLWbHVNhk

https://www.youtube.com/watch?v=1EYJ13KtCqk

FICHA 9: FRACTALES III

Panel 9



Haz click aquí para ver el panel completo

Nivel educativo:
Secundaria

PARA LEER

El último panel de la serie fractal está dedicada al tamiz de Apolonio que, al usar circunferencias tangentes, lo asocia a las burbujas.

Imagen 6

Apolonio (Pérgamo 262 a de C, Alejandría 190 a de C) que fue conocido como el Gran Geómetra. Una de sus obras más importantes, de la que tenemos constancia gracias a matemáticos/as posteriores como Hypatia de Alejandría fue las cónicas donde aparece por primera vez los conceptos de parábola, elipse e hipérbola.

Cuando Apolonio habla de cónicas se refiere a cortes que se le hacen a un cono.

ACTIVIDADES

Actividad 1

Identifica, en el helado, el cono y la semiesfera y los elementos característicos del cono

Imagen 7

El tamiz de Apolonio, de forma tridimensional, sería así:

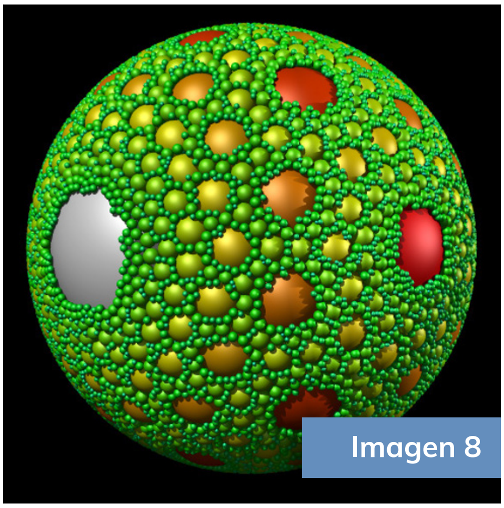


Imagen 8

Vamos a hacerlo en dos dimensiones, con circunferencias.

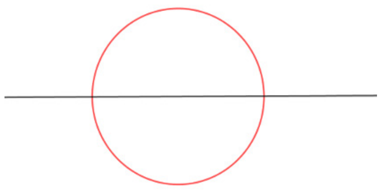
Actividad 2

¿Qué posiciones pueden tener dos circunferencias?

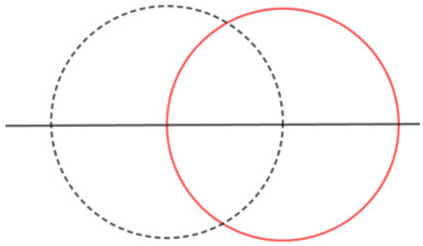
Actividad 3

Para construir el tamiz tienes que seguir los pasos siguientes:

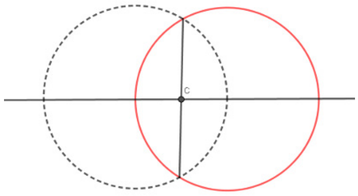
- Construye una circunferencia con centro en una línea recta que has fijado.



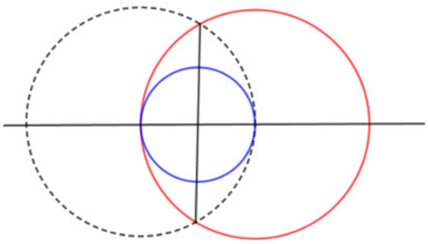
- Construye, con centro la intersección de la recta con la circunferencia, otra circunferencia con el mismo radio.



- Traza un segmento que una los dos puntos de corte de ambas circunferencias, el punto de corte de las dos rectas va a ser el centro de la primera circunferencia tangente a nuestra circunferencia de partida.



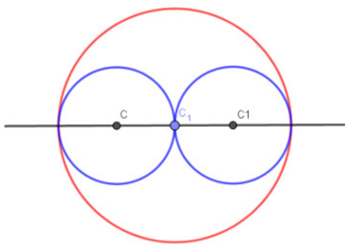
- Traza una circunferencia de centro C y radio la distancia del centro a la circunferencia; ya tienes la primera tangente.



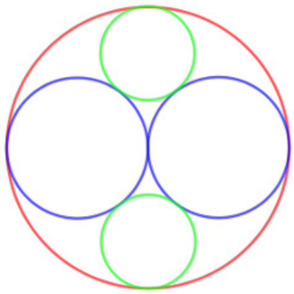
Actividad 4

¿Cómo construirías la siguiente circunferencia?

Como pista, ayúdate del punto C, lo necesitas a la misma distancia, pero en el otro lado.



La siguiente iteración, borrando las líneas auxiliares, quedaría así.



Por supuesto se puede seguir infinitamente, como en todos los fractales.

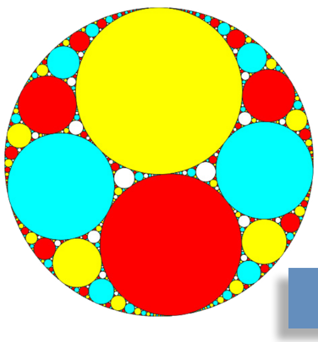
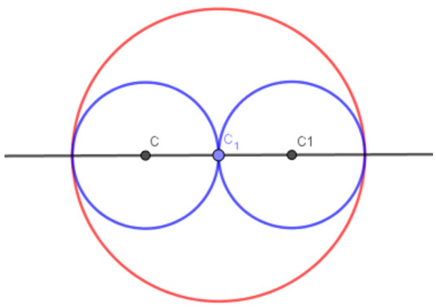


Imagen 9

Actividad 5

Si la circunferencia roja tiene radio 4, calcula su área y su perímetro, ¿cuál sería el radio de las circunferencias azules?



Para saber más sobre los fractales, te recomendamos algunas páginas:

https://www.xatakaciencia.com/matematicas/que-son-los-fractales-y-como-se-construyen

http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodperv/fractales/definicion-de-fractal/

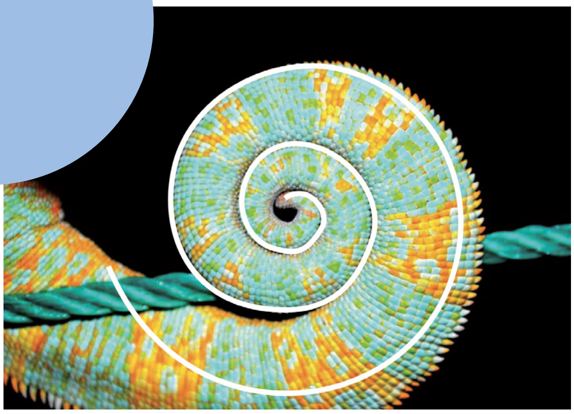
http://proyectomatematicasyarte.blogspot.com/2017/06/fractales-matematicas-y-arte-recursos.html

También puedes ver un fractal en los vídeos siguientes:

https://www.youtube.com/watch?v=pCpLWbHVNhk

https://www.youtube.com/watch?v=1EYJ13KtCqk

Panel 10



Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 10: ESPIRAL ARQUIMEDIANA

Nivel educativo:
Secundaria

PARA LEER

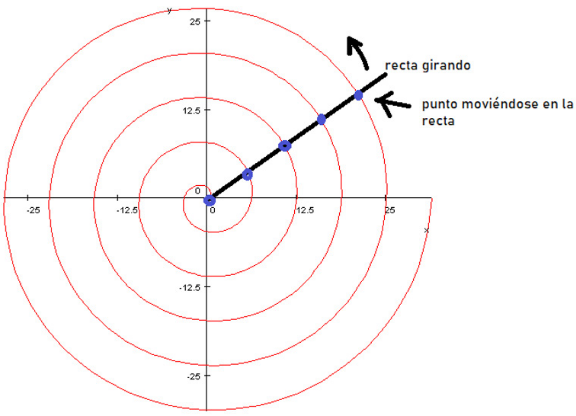
Imagen 10

Arquímedes de Siracusa es uno de los matemáticos más grandes de la humanidad. Se adelantó miles de años a su tiempo comenzando a utilizar herramientas que muchos siglos después darían lugar al cálculo infinitesimal, aunque es más conocido por sus inventos que tuvieron en jaque al ejército romano durante el sitio de su ciudad o por el principio de Arquímedes.

Las espirales son figuras geométricas que ayudan a recoger volúmenes, como es el caso de la cola del saltamontes que se ve en el panel o la lengua de las mariposas

Esta espiral es una de sus construcciones mecánicas, que no puede construirse con regla y compás, necesita un movimiento. Arquímedes la definió de esta manera: “una línea que gira con velocidad constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral”.

En esta espiral, la distancia entre las espiras se mantiene constante, por eso se llama también espiral de paso uniforme. Y ¿por qué le interesó a Arquímedes? Para resolver dos de los tres famosos problemas geométricos griegos: la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.



La trisección del ángulo

El problema consiste en dividir un ángulo en tres ángulos de igual apertura pero usando sólo regla y compás

ACTIVIDADES

Actividad 1

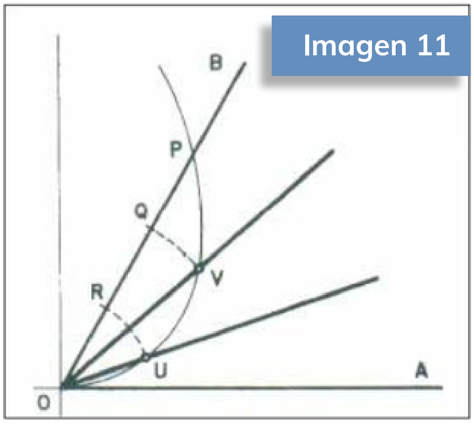


Imagen 11

¿Cuánto mediría cada ángulo al trisecar un ángulo llano?

¿Cuánto mediría cada ángulo al trisecar un ángulo recto?

Arquímedes lo que hizo fue pegar el ángulo en su espiral, coincidiendo el vértice con el origen de esta, luego tomó el primer punto de corte del último lado del ángulo con la espiral y dividió el segmento resultante en tres partes iguales y con un compás fue trazando arcos desde esos puntos hasta tocar la espiral: las intersecciones, unidas la vértice, trisecaban el ángulo.

Actividad 2

Si la longitud del lado a dividir en tres partes iguales es de 3 dm 12 cm ¿cuántos cm mide cada parte dividida?

La cuadratura del círculo

Es otro de los tres problemas consite en construir, con regla y compás, un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado.

Actividad 3

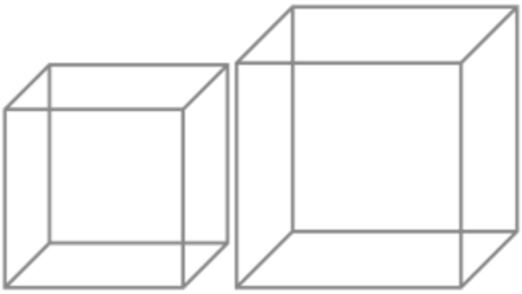
¿Qué área tiene aproximadamente un círculo de radio 2 cm? ¿Y un cuadrado de lado 2 cm?

Si divides el área del círculo entre la del cuadrado, ¿qué valor obtienes?

Haz lo mismo con otro círculo y un cuadrado cuyo radio y lado, respectivamente, es de 3 cm ¿qué conclusión obtienes?

La duplicación del cubo

El último de los tres problemas es construir con regla y compás un cubo de volumen el doble de uno dado. Dice la leyenda que este problema surge de una pandemia. Sí, no era un coronavirus, era la peste que estaba asolando Atenas. Algunos de los habitantes deciden ir a la ciudad de Delfos para consultar al Oráculo y saber cómo pueden detener la epidemia. La respuesta a la consulta del Oráculo es que debían elaborar un nuevo altar (el de entonces era un cubo) de la misma forma cuyo volumen duplique el del altar existente.



Actividad 4

Imagina que el cubo era de lado 1 km, ¿qué volumen tendría?

Si duplicas la longitud de cada lado, ¿qué volumen obtienes? ¿Se ha duplicado? Si no es así, ¿por qué número se ha multiplicado?

Haz lo mismo triplicando la longitud de los lados. ¿Qué conclusión obtienes?

Ninguno de los tres problemas tiene solución, se tardaron siglos en demostrar que no se podía hacer.

Para saber más sobre esta espiral:

https://www.gaussianos.com/la-espiral-de-arquimedes/

https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Arqu%C3%ADmedes

Panel 11

Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 11: ESPIRAL LOGARÍTMICA

Nivel educativo:
Bachillerato

PARA LEER

Descartes llamó a esta *espiral equiangular* y Bernouilli terminó llamándola *espiral maravillosa* cuando fue descubriendo todas sus propiedades.

Esta espiral tiene dos progresiones, una aritmética (el ángulo de giro) y otra geométrica (el radio).

ACTIVIDADES

Actividad 1

Completa la siguiente tabla sobre el ángulo y el radio de una espiral logarítmica. Recuerda, cuando el radio aumenta geométricamente el ángulo lo hace aritméticamente.

Ángulo (rad)	Radio (cm)
$\frac{\pi}{6}$	**2**
$\frac{\pi}{3}$	
	8
$\frac{4\pi}{3}$	
$\frac{8\pi}{3}$	**32**

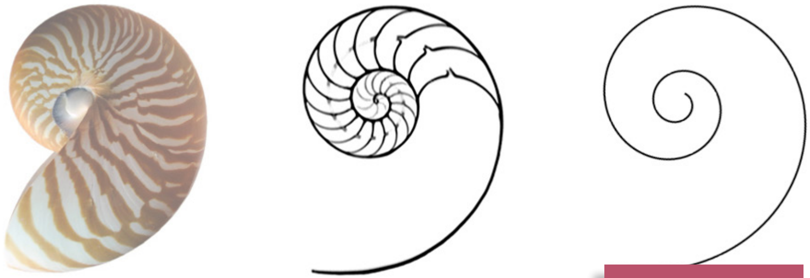
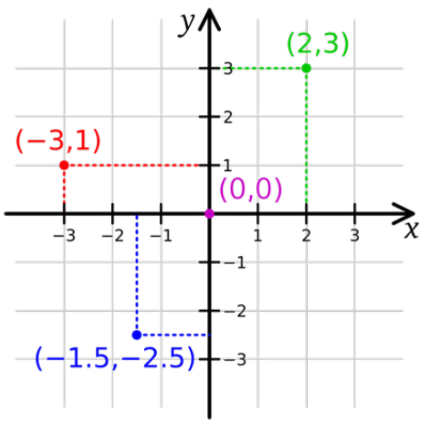


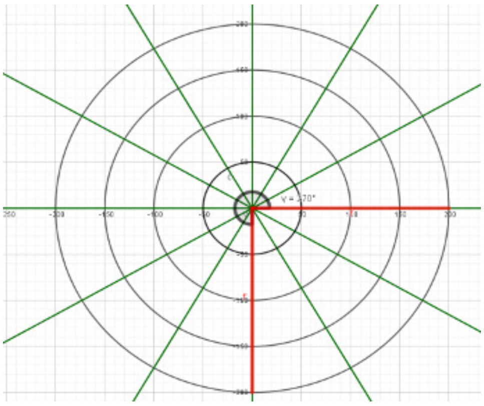
Imagen 12

Coordenadas polares

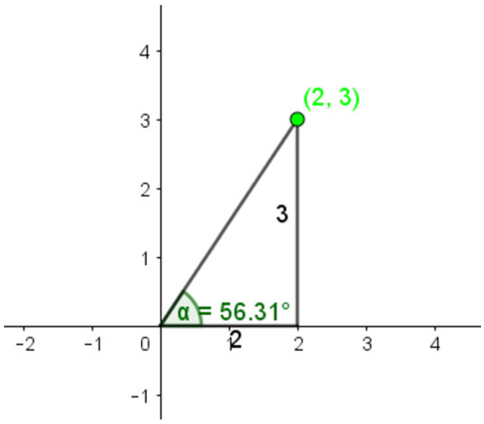
Para situar un punto en el plano se utilizan las coordenadas cartesianas, en las que cada punto queda determinado por dos valores (x, y). El primer valor corresponde a la posición en la recta horizontal (eje X o eje de abscisas) y la segunda corresponde al eje vertical o eje de ordenadas.



Pero en curvas suele ser más cómodo usar coordenadas polares, en las que cada punto también está determinado por dos valores. El primero corresponde a la distancia a recorrer (radio) y el segundo al giro (ángulo) que hay que realizar con respecto al eje horizontal. En la viñeta de Forges aparece un radio de 200 metros y un ángulo de $\frac{3\pi}{2}$ rad.



Para realizar un cambio de coordenadas de cartesianas a polares, hay que calcular el radio (distancia del origen de coordenadas al punto) y el ángulo que forma el radio con el semieje positivo X.



Por el teorema de Pitágoras r= $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

Utilizando trigonometría α=arctg($\frac{4}{3}$)≅0´93 rad

Actividad 2

Escribe, en coordenadas polares, los puntos (-3,1) y (-1.5, -2.5). ¡Ojo, hay que fijarse en qué cuadrante está el radio!

¿Por qué el nombre de logarítmica?

La ecuación en coordenadas polares de la espiral logarítmica es $r=a\cdot b^{\alpha}$

r representa al radio y α al ángulo, siendo a y b dos números positivos que determinan el tamaño de la espiral.

Si en vez del radio en función del ángulo quisiéramos tener el ángulo en función del radio, habría que despejar

$$b^{\alpha}=\frac{r}{a} \Rightarrow \alpha=\log_b \frac{r}{a}$$

Ahí aparece el logaritmo que da nombre a la espiral.

Actividad

Escribe la ecuación en coordenadas polares de la espiral logarítmica y despeja el ángulo para:

$a=1$ y $b=e$.

$a=2$ y $b=10$.

$a=3$ y $b=\frac{1}{e}$.

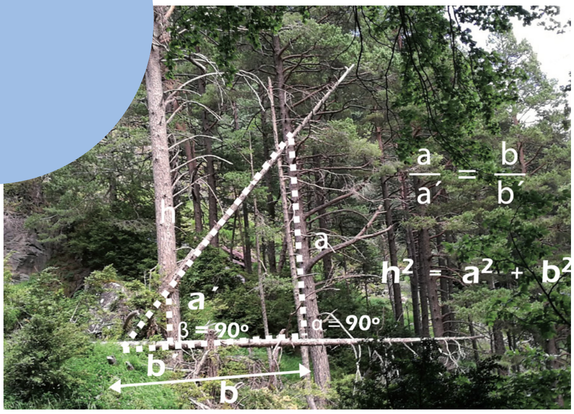
Más información sobre la espiral logarítmica la puedes encontrar en las direcciones Web siguientes:

https://www.ecured.cu/Espiral_logar%C3%ADtmica

https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0648-02/logarit.html

https://www.youtube.com/watch?v=aopHcOm7a-w

Panel 12



Haz click aquí para ver el panel completo

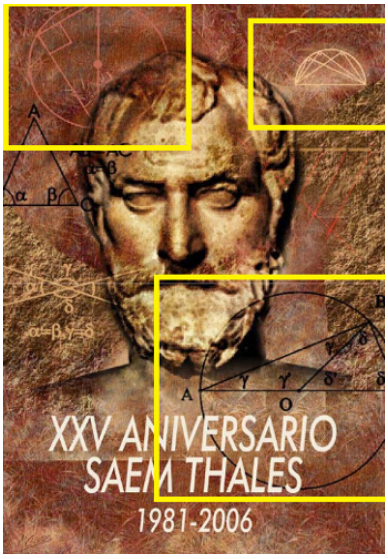
FICHA 12: THALES Y PITÁGORAS

Nivel educativo:

Secundaria

PARA LEER

Thales de Mileto (sí, con h en honor a la Sociedad Andaluza de Educación Matemática) fue uno de los siete sabios de Grecia. Aunque el teorema sobre proporcionalidad de segmentos es el más conocido, hay otro precioso teorema que también lleva su nombre.



El teorema de Thales

Tiene que ver con los dibujos que aparecen remarcados en la imagen anterior; viene a decir que si tenemos una circunferencia y un punto sobre ella, el triángulo que forma ese punto con los extremos del diámetro es rectángulo.

ACTIVIDADES

Actividad 1

Si tenemos una circunferencia de radio 8 cm, se traza un diámetro perpendicular al dado y se toma el punto de corte del mismo con la circunferencia, creando un triángulo con tres puntos cualesquiera de los encontrados:

- ¿Qué longitud tienen los catetos?
- Calcula el perímetro del triángulo.
- ¿Qué área tiene el triángulo?
- ¿Qué forma tiene la figura que une los cuatro puntos?
- Calcula el área y el perímetro de dicha figura.

Teorema de Pitágoras

Aunque se utilizaba antes de Pitágoras, parece que la primera demostración del teorema es de su escuela. Su enunciado dice que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

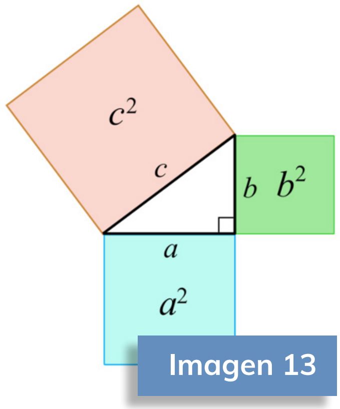


Imagen 13

En el dibujo sería $c^2=a^2+b^2$. De hecho seguramente lo has usado en la actividad 1.

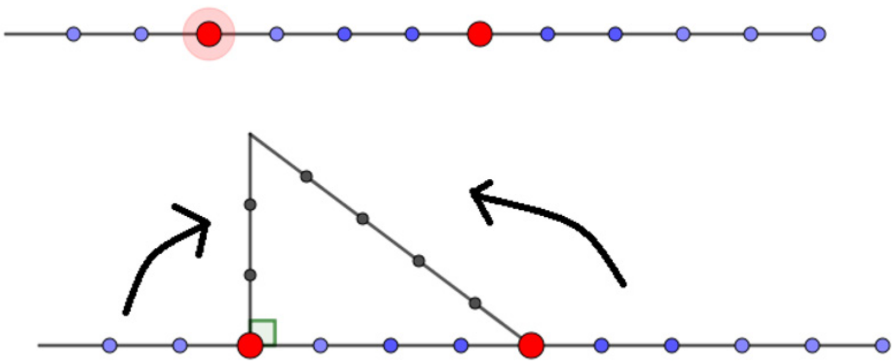
Uniendo los teoremas de Thales (que parece que fue su maestro) y de Pitágoras se pueden calcular muchas longitudes desconocidas.

Actividad 2

Tenemos una cometa de 50 m de hilo atada a una piedra que está volando en la playa de Tarifa; no se sabe a qué altura está, pero hemos medido la distancia de la piedra al punto de la playa donde la cometa está debajo de nuestros pies: 40 metros. ¿A qué altura está volando?

La cuerda de 12 nudos

Cuenta la leyenda que Pitágoras descubrió el teorema en un viaje a Egipto, cuando observó que utilizaban una cuerda que tenía 12 nudos, hechos a la misma distancia, para trazar ángulos rectos. Contaban el nudo tercero, después el séptimo y unían en forma de triángulo los extremos formando un ángulo recto con los dos lados más cortos.



Actividad 3

Si entre cada nudo hay 1 dm de distancia ¿qué longitud tienen los tres lados del triángulo que han formado los egipcios?

Comprueba que se cumple el teorema de Pitágoras.

Ternas Pitagóricas

Pitágoras dedujo que cualquier trío de números a, b, c que cumplieran la propiedad de $a^2=b^2+c^2$ serían las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Si esos números son enteros positivos se les llaman ternas pitagóricas. En la cuerda de 12 nudos se cumple que $3^2+4^2=5^2$, por lo que 3, 4 y 5 forman una terna pitagórica.

Actividad 4

Completa la siguiente tabla:

	a	b	c	Terna Pitagórica
Fila 1	**5**	**3**	**4**	**Sí**
x 2				
x 3	**15**	**9**	**12**	
+2	**7**	**5**	**6**	
+4				

¿Puedes deducir alguna conclusión de los resultados anteriores?

Encuentra una terna pitagórica en la que a=100.

La espiral pitagórica

Si volvemos al mundo de las espirales, la espiral de Teodoro o espiral pitagórica es la siguiente:

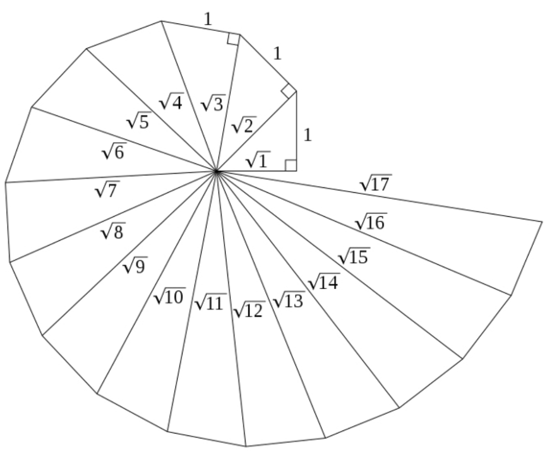


Imagen 14

La idea es partir de un triángulo rectángulo isósceles (una escuadra) de catetos iguales a la unidad. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que la hipotenusa es igual a $\sqrt{2}$.

Esta hipotenusa ahora será el cateto del nuevo triángulo siendo el otro de longitud la unidad, por lo que la nueva hipotenusa tendrá un valor igual a $\sqrt{3}$, y así sucesivamente.

Actividad 5

¿Qué perímetro tiene la espiral del dibujo? (no se cuentan las líneas internas).

Calcula el área de la superficie del dibujo.

¿Alguno de los triángulos tiene por área un número natural? ¿Cuáles?

En la siguiente Web encontrarás distintas demostraciones del teorema de Pitágoras realizadas con GeoGebra:

https://www.geogebra.org/m/bsb4bkne

No es la única página que ofrece estas demostraciones animadas, por lo que puedes buscar otras también en **www.geogebra.org**

Panel 13

Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 13: TESELACIONES I

Nivel educativo: Secundaria

PARA LEER

Como aparece en la fotografía, en una teselación regular sólo se puede utilizar un único polígono regular. Para poder formar el plano, la suma de los ángulos de los polígonos adosados tiene que ser 360º.

ACTIVIDADES

Actividad 1

Completa la siguiente tabla

Polígono regular	Ángulo interior	360º /ángulo interior	Numero de polígonos adyacentes ¿tesela?
Triángulo	**60º**	**6**	**Sí**
Pentágono			
Heptágono			
	180º·6/8=135º	**2,66666...**	**No se puede, no es un número natural**

Problema isoperimétrico

Este problema se conoce desde la Grecia Clásica.

Iso → igual

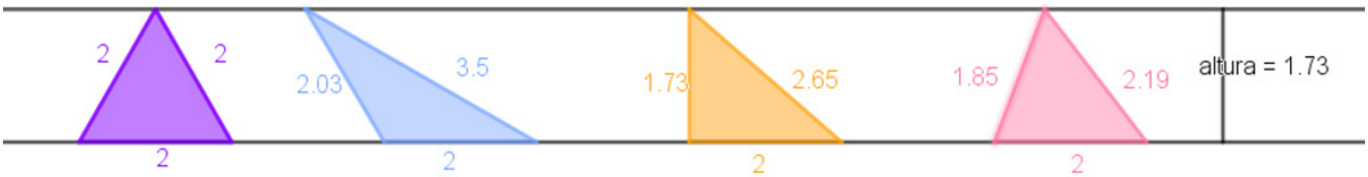
Perimétrico → medida del perímetro

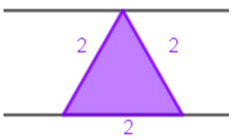
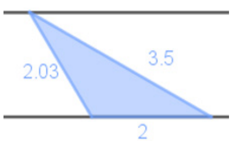
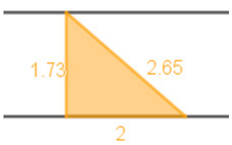
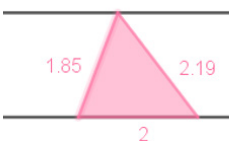
De entre todas las figuras planas cerradas que tengan el mismo perímetro ¿cuál es la que tiene mayor área?

Puede ser muy complejo, pero vamos a intentar exponerlo utilizando polígonos, de manera que nos permita obtener algunas conclusiones.

Actividad 2

Completa la siguiente tabla:



Triángulo	Base	Altura	Perímetro	Área
				
				
				
				

¿Qué conclusión deduces de los valores anteriores?

A través del siguiente enlace podrás conocer todos los mosaicos que puedes encontrar en La Alhambra de Granada:

https://www.alhambra-patronato.es/geometria-matematica-alicatados

Panel 14

Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 14: TESELACIONES II

Nivel educativo:
Secundaria

PARA LEER

El origen del problema

Este problema de abarcar la máxima área con el mismo perímetro puede tener su origen en la Eneida; en el libro en el que Virgilio fabula el origen de Roma a partir de la guerra de Troya. En el libro IV aparece Dido que se enamora de Eneas y huyen juntos. A partir del verso 365 se dice:

Llegaron a estos lugares, donde ahora ves enormes murallas

y nace el alcázar de una joven Cartago,

y compraron el suelo, que por esto llamaron Birsa,

cuanto pudieron rodear con una piel de toro.

¿Cómo se puede fundar una ciudad con sólo lo que pudieran rodear con una piel de toro? Gracias a una fantástica idea de Dido.

Imagen 15

En la imagen se ve como Dido ordena que corten la piel del toro en tiras muy finas y rodeen la máxima cantidad de tierra posible ¡Así sí!

ACTIVIDADES

Actividad 1

Una piel de toro puede tener una superficie de 4 m^2. Vamos a modelizarlo.

a. Si la piel tuviera una forma cuadrada ¿qué longitud tendría el lado?

b. Corta ese cuadrado en tiras de 5 cm de ancho. ¿Cuántas tiras tendrías?

c. ¿De qué longitud dispones?

d. Si formaras ahora un cuadrado con las tiras, ¿qué superficie tendría?

El sitio arqueológico de Cartago tiene una superficie de 180 km^2 ¿te llega la cinta anterior para comprar la ciudad?

Actividad 2

Encuentra un ancho lo suficientemente pequeño como para rodear 1 km^2

Polígono regular con mayor área

En el panel citan hexágonos regulares. Ya hemos visto que teselan en plano pero, ¿por qué no triángulos equiláteros o cuadrados?

Actividad 3

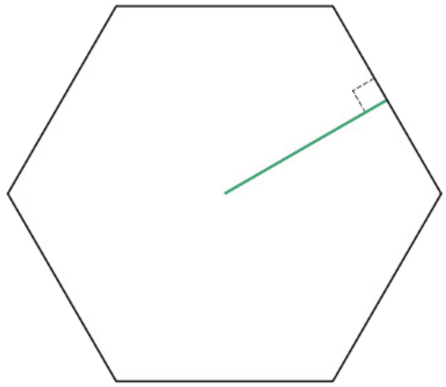
Con una cuerda de 12 dm forma un triángulo equilátero.

a. ¿Cuánto mide su altura? (con un error menor de 1 cm).

b. ¿Cuánto vale su área? (con un error menor de 1 cm^2).

Ahora, con la misma cuerda, forma un cuadrado ¿cuánto mide su área?

A continuación, con la misma cuerda, forma un hexágono regular.



c. ¿Cuánto mide su apotema? (con un error menor de 1 cm)

d. ¿Cuánto vale su área? (con un error menor de 1 cm^2)

e. ¿Qué conclusión obtienes?

Te recomendamos el siguiente libro creado con GeoGebra por Manuel Sada en el que podrás observar y manipular las teselaciones de M.C. Escher:

https://www.geogebra.org/m/dAqNKuXH

Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 15: SIMETRÍA AXIAL

Nivel educativo:
Secundaria

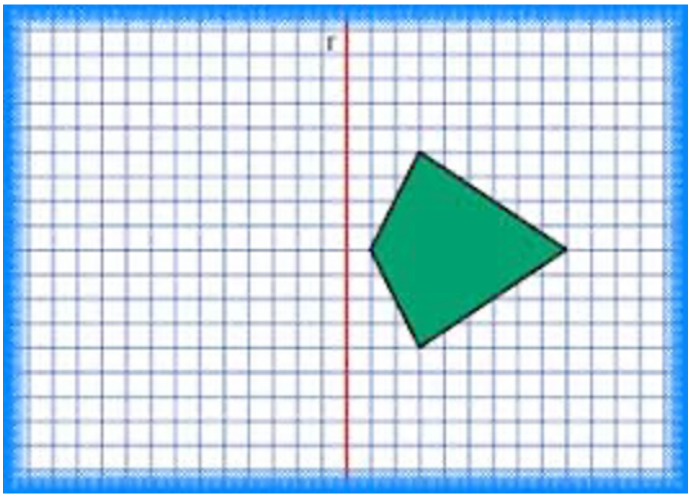
PARA LEER

La simetría axial se da cuando los puntos de una figura coinciden con los puntos de otra, al tomar como referencia una línea que se conoce con el nombre de eje de simetría.

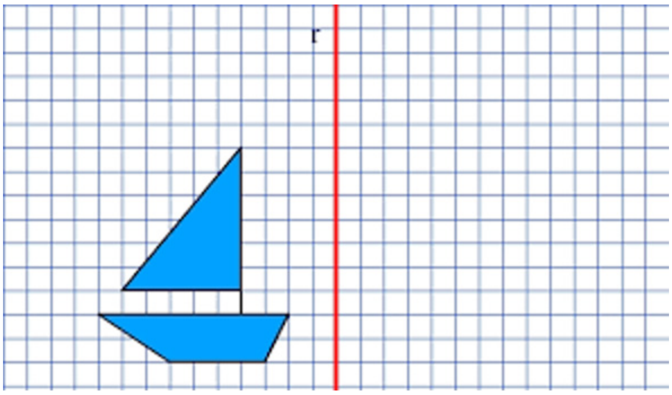
ACTIVIDADES

Actividad 1

¿Podrías construir la imagen simétrica de esta figura?



¿Y de esta otra?



En la simetría axial se da el mismo fenómeno que en una imagen reflejada en el espejo.

Actividad 2

Simetría de las figuras regulares

Vamos a fijarnos ahora en las figuras regulares (tiene lados y ángulos iguales), ¿son figuras geométricas? ¿Tienen un solo eje de simetría? ¿Cuántos ejes de simetría tienen?

Actividad 3

Dado un pentágono regular, dibuja todos los ejes de simetría que encuentres. ¿Dónde se cortan estos ejes? ¿Podrías dibujar la circunferencia circunscrita a esta figura?

Describe cual sería su centro y radio

Actividad 4

Vamos un poco más lejos, ¿qué objeto matemático obtendremos si trazamos el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta y un punto fijo, no perteneciente a la recta anterior?

Como pista te indicamos que la recta se denomina directriz y el punto fijo recibe el nombre de foco.

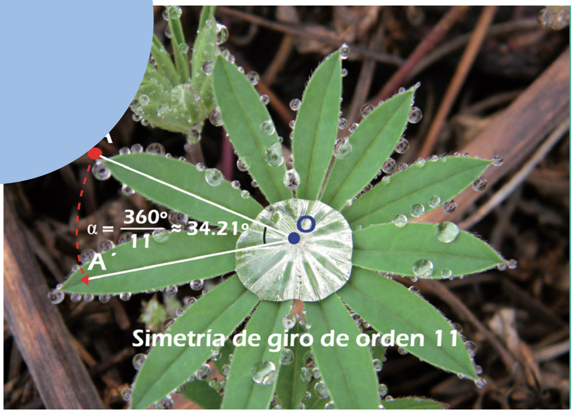
También creado con GeoGebra te recomendamos manipular las construcciones existentes en la siguiente dirección, creadas por Álvaro Fernández y Pablo Triviño.

https://www.geogebra.org/m/WGQMmqd7

FICHA 16: SIMETRÍA DE GIRO

Nivel educativo: Secundaria

Panel 16



Haz click aquí para ver el panel completo

PARA LEER

Una figura plana tiene una simetría de giro cuando podemos encontrar un centro (centro de rotación) y un ángulo (entre 0° y 360°) de manera que al girar la figura tomando ese centro y ese ángulo, coincide la figura original.

El número de veces que se puede hacer coincidir la imagen rotada con la imagen original se llama *orden de la rotación*.

ACTIVIDADES

Actividad 1

¿Todas las figuras tienen simetría de giro?

Vamos a centrarnos en los polígonos regulares, es decir, un polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales entre sí. Empecemos por el más básico, el triángulo equilátero.

Actividad 2

Dado un triángulo equilátero y su centro, indica el ángulo mínimo (mayor estricto que 0) que tenemos que rotar la figura para obtener un triángulo simétrico al dado.

¿Cuál es el orden de simetría de un triangulo equilátero?

Actividad 3

Si ahora tomamos un cuadrado, ¿podrías indicar el ángulo de rotación? ¿Y el orden de simetría?

Actividad 4

¿Se podría generalizar para un polígono regular de n lados n =3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 y 12?

Actividad 5

Fijémonos ahora en la naturaleza las flores, que son un claro ejemplo donde se puede estudiar la simetría de giro. Establece el centro de la flor e indica el orden de simetría de esta figura.

Actividad 6

Podemos encontrar otro ejemplo de simetría en las estrellas de mar. Establece el centro de la estrella e indica el orden de simetría de esta figura.

Para saber más de este tema y en general de los movimientos en el plano, te proponemos la siguiente página en la que encontrarás como trabajar estos procesos con ayuda de GeoGebra, programa de geometría dinámica que hemos citado en otras fichas de esta exposición.

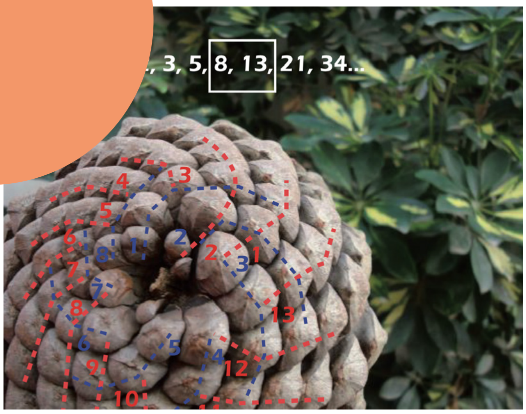
https://www.edu.xunta.gal/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1491479279/contido/ud08_movimientos_plano/2_transformaciones_geomtricas_movimientos.html

Y para conocer aún más, puedes consultar estas Web:

https://calculo.cc/temas/temas_geometria/movimiento_plano/teoria/giro.html

http://descargas.pntic.mec.es/cedec/mat3/contenidos/u7/M3_U7_contenidos/index.html

Panel 17



Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 17: SUCESIÓN DE FIBONACCI

Nivel educativo:
Secundaria y Bachillerato

PARA LEER

Leonardo de Pisa, matemático italiano, conocido por su apodo Fibonacci (hijo de Bonacci) que vivió de 1170 a 1250 escribió una gran cantidad de libros, entre ellos, uno titulado "Liber Abaci" (1202) en el que aparece la descripción de la sucesión que lleva su nombre.

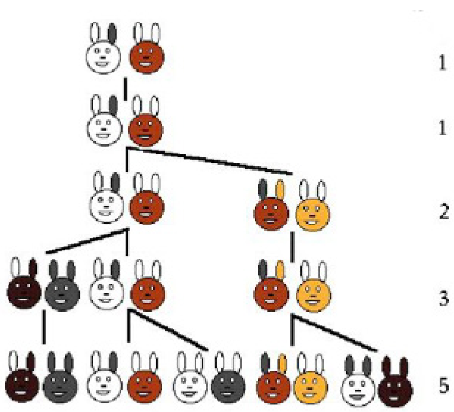
El enunciado a partir del cual se general la sucesión es cuando menos curioso.

El concepto de sucesión ha quedado expuesto en las actividades correspondientes a la ficha de trabajo del panel número 4.

"Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, a partir de ese momento cada mes engendra una pareja de conejos, que a su vez, tras ser fértiles, engendrarán cada mes una nueva pareja de conejos. ¿Cuántos conejos habrá después de un determinado número de meses?"

El número de parejas de conejos que hay cada mes da lugar a una sucesión de números denominada sucesión de Fibonacci, de la que habrás deducido al menos los primeros términos.

1, 1, 2, 3, 5, …



Intenta seguir la serie y encuentra la relación que se aplica para obtener los términos de la sucesión.

Intenta encontrar una expresión para el término general de la sucesión (a_n).

La sucesión de Fibonacci ha tenido intrigados a los matemáticos durante siglos, sobre todo al presentarse en los lugares más inesperados.

Entre los términos de esta sucesión que reciben el nombre de números de Fibonacci existe una gran cantidad de relaciones de las que te proponemos que deduzcas o demuestres algunas.

ACTIVIDADES

Actividad 1

Escribe al menos los treinta primeros términos de la sucesión de Fibonacci.

Intenta establecer alguna relación para responder a las siguientes cuestiones:

a. ¿Qué términos son pares?

b. Encuentra los términos cuyo valor es múltiplo de 3, ¿qué lugares ocupan?

c. Haz lo mismo con los términos cuyo valor es múltiplo de 5 y posteriormente para los que son múltiplos de 8. Determina alguna regularidad.

Actividad 2

“Todo número natural se puede expresar como suma de números de Fibonacci no consecutivos”

Aplica esta propiedad para encontrar la expresión de los números naturales siguientes:

10

34

55

201

Escribe un número cualquiera menor que 100 y pide a tu compañero que intente expresarlo como suma de números de Fibonacci no consecutivos.

Actividad 3

Relaciona la suma de los diez primeros términos de la sucesión de Fibonacci con algún término de la sucesión

Actividad 4

Al sumar dos términos que ocupan posiciones pares consecutivas ¿qué obtienes? Hay alguna relación con otro término de la sucesión. ¿Y cuando se suman dos términos que ocupan posiciones impares consecutivas?

Ya conoces los términos de la sucesión de Fibonacci y algunas de las numerosas propiedades que existen entre sus términos.

En general, se denomina sucesión de Fibonacci a la generada a partir de dos números, obteniendo cada término como suma de los dos anteriores. Es decir, dados dos valores iniciales a_1 y a_2 el término general es $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.

Por ejemplo, para los dos valores iniciales 2 y 4, la sucesión de Fibonacci sería:

2, 4, 6, 10, 16, 26, ...

¿Crees que las propiedades expuestas en las actividades anteriores se cumplirán para cualquier sucesión de Fibonacci?

Lo más sorprendente de estos números no son sus relaciones numéricas sino su presencia en la naturaleza.

Por ejemplo, las ramas y las hojas de las plantas se distribuyen buscando siempre recibir el máximo de luz para cada una de ellas, por lo que ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior. La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo secuencias basadas exclusivamente en estos números.

El número de espirales en numerosas flores y frutos también se ajusta a parejas consecutivas de términos de esta sucesión: los girasoles tienen 55 espirales en un sentido y 89 en el otro, o bien 89 y 144, y las margaritas presentan las semillas en forma de 21 y 34 espirales.

Lo mismo ocurre con cualquier variedad de piña que presenta siempre un número de espirales que coincide con dos términos de la sucesión de Fibonacci, 8 y 13; o 5 y 8.

Intenta comprobar que ocurre lo mismo en la imagen del aloe o del girasol que aparecen a continuación.

Aún más asombroso puede resultar descubrir que detrás de estos números se encuentra el número áureo tan presente no solo en la naturaleza sino también en arte, arquitectura, etc., sin olvidar que también lo encontramos en objetos de uso cotidiano.

Actividad 5

Escribe los sucesivos términos de la sucesión de Fibonacci. A continuación, calcula el valor obtenido al dividir cada término entre el anterior.

¿Qué observas?

¿Puedes deducir al número al que se aproximan los sucesivos cocientes?

Efectivamente, se aproximan al número de oro

$$\varphi=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=1{,}61803398\ldots$$

Te animamos a ver el siguiente vídeo elaborado por Cristóbal Vila sobre los números en la naturaleza:

https://www.youtube.com/watch?v=lGK80T3H27A

Panel 18

Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 18: DESIGUALDAD ISOPERIMÉTRICA

Nivel educativo:
Bachillerato

PARA LEER

Isoperimétrico significa igual perímetro. Este problema matemático tiene su origen en la reina Dido, cuya historia ya contamos en las fichas 13 y 14. Cuenta la historia que la reina llegó a las costas de África y pidió hospitalidad para ella y su séquito al rey Jarbas.

Ante esta petición el rey Jarbas le expuso que le daría tanta tierra para instalarse como ella pudiera abarcar con una piel de buey.

Ante este problema la reina Dido lo primero que hizo fue cortar finas tiras y así consiguió circunscribir un extenso perímetro en forma de circunferencia, dando lugar una fortaleza llamada Birsa y una posterior ciudad llamada Cartago (“Ciudad Nueva”).

Lo que la reina Dido utilizo es que, entre las figuras planas de igual área, la que menos perímetro tiene es el círculo.

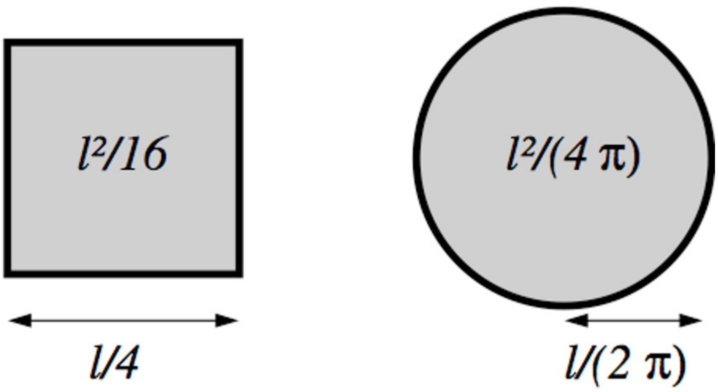
Vamos a comprobarlo.

ACTIVIDADES

Actividad 1

Tomamos un cuadrado de lado $\frac{l}{4}$ y un círculo de radio r= $\frac{l}{2\pi}$, calcula el perímetro y área de ambas figuras y comprueba que el perímetro de ambas figuras es el mismo pero el área del círculo es mayor que el del cuadrado. (Puedes utilizar una inecuación)

En este mismo sentido podemos destacar otros resultados.



Actividad 2

Dados dos polígonos regulares con el mismo perímetro, el que tiene más ángulos tiene área mayor.

Escoge dos polígonos regulares (un cuadrado y un pentágono) siendo el lado del cuadrado $\frac{l}{4}$ y el lado del pentágono $\frac{l}{5}$. Calcula el área de dichos polígonos regulares y comprueba que para cualquier valor de l se cumple que el área del pentágono es mayor que la del cuadrado.

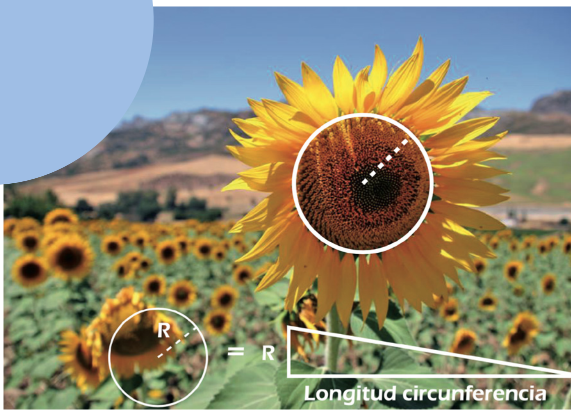
Actividad 3

Entre los polígonos con el mismo número de lados e igual perímetro el polígono regular tiene el área mayor.

Dibuja un cuadrado y polígono de 4 lados que no sea regular de igual perímetro. Comprueba que el área del cuadrado es mayor que la de la otra figura.

FICHA 19: PI EN LA NATURALEZA

Nivel educativo: Secundaria



Panel 19

Haz click aquí para ver el panel completo

PARA LEER

Pi es uno de los números más importantes en matemáticas, es un número trascendental.

Pi es la razón (o cociente) entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. Es un valor constante, esto es, no cambia si cambiamos la circunferencia.

Empezamos con algo de historia matemática; Arquímedes, hace más de 2200 años, calculó, por medio de polígonos regulares inscritos y circunscritos, que π estaba comprendido entre 223/71 y 22/7.

ACTIVIDADES

Actividad 1

¿Podrías indicar una fracción que esté comprendida entre 223/71 y 22/7?

(Ayuda: usa las fracciones equivalentes)

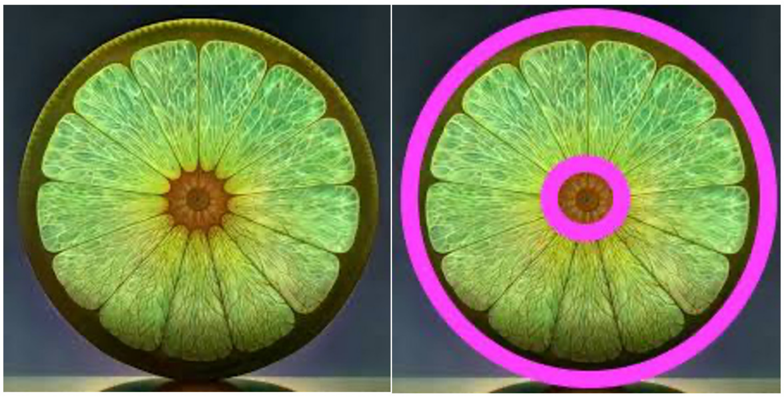
Otra curiosidad sobre el número pi es la asignación del nombre π, solo tiene tres siglos de antigüedad; William Jones lo utilizó por primera vez en 1706.

Actividad 2

¿Sabrías indicar alguna otra letra griega? ¿A qué letra representa el símbolo de π en el alfabeto griego?

Actividad 3

Fijémonos en la naturaleza. Observa la siguiente fotografía



¿Podrías indicar como se llaman las dos circunferencias señaladas?

Si R es el radio de la circunferencia con radio mayor y r la de radio menor, ¿podrías indicar el área del anillo comprendido entre las dos circunferencias?

Actividad 4

Podemos aproximar el número pi de una manera experimental a través del problema de la aguja de Buffon (1733).

El Conde de Buffon planteó el siguiente problema: calcular la probabilidad de que una aguja caiga por una red de líneas paralelas de anchura constante. Si L es la longitud de las agujas y c la distancia entre las líneas, el Conde demostró que la probabilidad de que la aguja se cruce con una línea es:

$$P = \frac{2L}{\pi c}$$

¿Serías capaz de obtener una aproximación del número pi utilizando el problema planteado y demostrado por el Conde Buffon?

(Ayuda: $\pi = \frac{\text{nº de agujas cruzadas}}{\text{nº total de agujas}}$)

Puedes conocer la historia del número pi en la dirección siguiente:

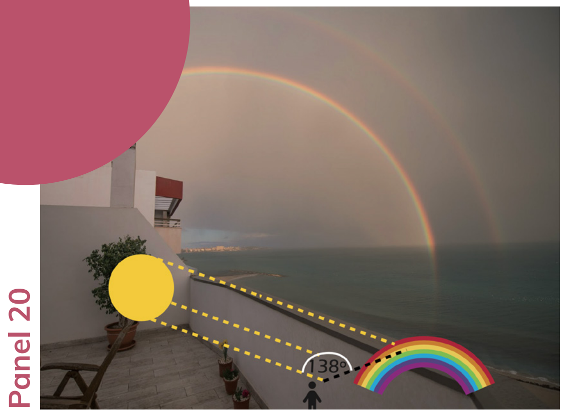
https://www.gtd.es/es/blog/la-historia-de-pi

También a través de este vídeo de la revista Muy interesante puedes descubrir algunas curiosidades sobre este número:

https://www.muyinteresante.es/ciencia/video/historia-y-curiosidades-sobre-el-numero-pi

Y en esta Web puedes conocer algo más sobre las cifras de pi:

https://eloutput.com/noticias/ciencia/record-decimales-numero-pi/



Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 20: EL ARCOIRIS

Nivel educativo:
Bachillerato

PARA LEER

Cuando la luz solar incide sobre las gotas de lluvia, estas se encargan de producir el efecto, pero en algunas mucho más que en otras. Los rayos del Sol involucrados con la formación del arcoíris salen de las gotas de lluvia con un ángulo de aproximadamente 138 grados respecto de la dirección que llevaban antes de entrar en ellas. Este es el «ángulo del arcoíris», descubierto por Rene Descartes en el año de 1637.

ACTIVIDADES

Actividad 1

Existen distintas unidades para medir ángulos: grados sexagesimales (una vuelta de circunferencia tiene 360 grados), grados centesimales (una vuelta tiene 400 grados) o radianes (un radian es el ángulo que abarca un arco que mide lo mismo que el radio), lo que dará que una vuelta es 2π radianes.

¿Serias capaz de completar la siguiente tabla?

Grados Sexagesimales			**180**	**270**
Grados Centesimales		**100**		
Radianes	**Pi**			

Actividad 2

Vamos ahora con los colores; el arcoíris es un gradiente de colores espectrales: rojo, naranja, amarillo, verde, cian, azul y violeta.

Podemos distinguir entre colores primarios, secundarios y terciarios.

Los colores primarios son colores que no se obtienen de la mezcla entre colores (rojo amarillo y. azul); los secundarios son los colores que se obtienen de la mezcla, a partes iguales, de dos colores primarios (naranja, verde y morado) y los colores terciarios que son una mezcla en partes iguales de un primario y un secundario, a los que llamaremos color intermedio. Y la otra es la unión de dos colores secundarios, con lo que se logran tres tonos poco saturados o sucios.

Actividad 3

¿Cuántos colores secundarios podemos obtener? ¿Cuántos colores terciarios podemos obtener mezclando colores primarios y secundarios?

Actividad 4

Volvamos al arcoíris; si vemos el arcoíris desde una montaña o desde un avión podemos vislumbrar un arcoíris completo. ¿Podrías dibujar un arcoíris completo? Esto es, 7 circunferencias concéntricas de manera que la distancia entre ellas se mantenga constante.

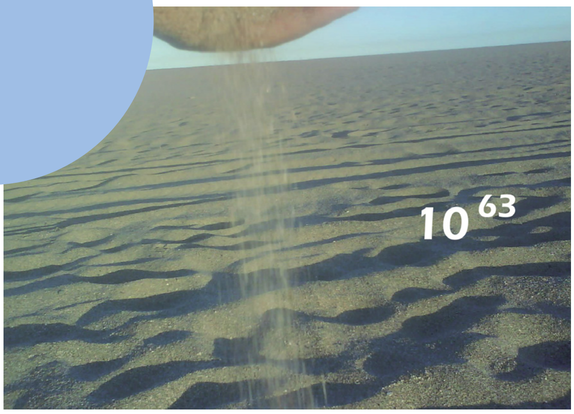
Para saber algo más sobre las matemáticas que encontrarás en el arcoíris, te recomendamos las páginas siguientes:

https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2016/02/29/140638

http://aulamatematica.com/AMD/PDF/AMD_03/03_AMD_41_44_alvaro.pdf

https://www.youtube.com/watch?v=xRrncWpz9sY

Panel 21



Haz click aquí para ver el panel completo

FICHA 21: NOTACIÓN CIENTÍFICA

Nivel educativo: Secundaria

PARA LEER

¿Cuánto dinero tiene un banco? ¿Y el Banco de España? ¿Y el banco de EEUU? También, podemos pensar algo muy pequeño, ¿cuál es diámetro de una bacteria o de una nano partícula?

Para cuantificar estas cantidades se creó la notación científica, que permite expresar números muy grandes o muy pequeños, de manera que no perdiera significatividad. De hecho, en Biología, Ciencias Naturales o Física y Química, es muy común usar este tipo de notación.

ACTIVIDADES

Actividad 1

Sabemos que la masa del Sol es, aproximadamente, 330000 veces la de la Tierra. Si la masa de la Tierra es $6 \cdot 10^{24}$ kg. ¿Podrías calcular la masa del Sol?

Actividad 2

Seguimos con el Universo, la Tierra tiene una masa aproximada de $6 \cdot 10^{24}$. Sabiendo que su densidad media es $5{,}5 \cdot 10^{3}$ kg/m3, calcula el volumen de la Tierra. Recuerda que la d=m/V

Cambiamos ahora un poco, nos vamos a medidas pequeñas, lo que supone utilizar exponentes negativos.

Actividad 3

La masa de un electrón es $9 \cdot 10^{-31}$ kg. Las masas tanto de un protón como de un neutrón es, aproximadamente, $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Determina la masa de un átomo de azufre sabiendo que tiene 16 electrones, 16 protones y 16 neutrones.

Actividad 4

La masa del electrón es $9 \cdot 10^{-31}$. Si en un tubo de aceleración alcanza una velocidad de $2 \cdot 10^{8}$ m/seg², ¿qué energía cinética tendrá el electrón dentro de dicho tubo?

Recuerda la fórmula de la energía cinética es $Ec = 1/2\ m\ v^2$.

Te recomendamos este vídeo sobre números muy grandes y muy pequeños, para los es aconsejable la notación científica.

https://youtu.be/_zvmwArQv5w

RELACIÓN DE IMÁGENES USADAS EN EL DOCUMENTO

Imagen 1: http://www.aprendizajeverde.net/noticias/la-relacion-entre-la-naturaleza-y-las-matematicas-que-te-sorprendera

Imagen 2: https://www.smartick.es/blog/matematicas/curiosidades-matematicas/matematicas-en-la-naturaleza/

Imagen 3: https://miramath.wordpress.com/matematica-en-la-naturaleza/

Imagen 4: Pixabay

Imagen 5: https://www.aepjp.es/matematicas-en-la-naturaleza-una-belleza-oculta-entre-las-flores/

Imagen 6: Olga Sytina&AlexeyKljatov | Flickr

Imagen 7: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Apollonii_Pergei_Opera_1537_detail.jpg

Imagen 8: Pixabay

Imagen 9: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Apollonian_spheres.jpg

Imagen 10: https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:RandomApollonianCircleFractal.svg

Imagen 11: Flickr

Imagen 12: http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/curvashistoria.pdf

Imagen 13: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ed/Nautilus_Section_cut_Logarithmic_spiral.jpg

Imagen 14: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pythagoras-theorem.png

Imagen 15: https://ca.m.wikipedia.org/wiki/Fitxer:Spiral_of_Theodorus.svg

Imagen 16: https://faculty.math.illinois.edu/~laugesen/dido-isoperimetry-history.pdf

SOCIEDAD ANDALUZA DE
EDUCACIÓN MATEMATICA THALES

https://thales.cica.es/

FUNDACIÓN ANDALUZA PARA LA
DIVULGACIÓN DE LA INNOVACIÓN Y
EL CONOCIMIENTO

www.fundaciondescubre.es